総和規約の練習

1　基本事項

1. ベクトルの正規直交基底の線形結合による表現

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = u_i\boldsymbol{e}_i \;\rightarrow\; \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{1. 1}$$

2. 正規直交基底の内積とクロネッカーデルタ

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1. 2}$$

3. ベクトルの内積

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= (u_i\boldsymbol{e}_i) \cdot (u_j\boldsymbol{e}_j) = u_i v_j(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i = u_j v_j \\ &\rightarrow\; \{u\}^T\{v\} = \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{1. 3}$$

4. ２階テンソルの正規直交基底のテンソル積の線形結合による表現

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= A_{11}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) + A_{12}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2) + \cdots + A_{33}(\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3) = A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = A_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) \\ &\rightarrow\; [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1. 4}$$

5. ベクトルのテンソル積

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} &= (u_i\boldsymbol{e}_i) \otimes (u_j\boldsymbol{e}_j) = u_i v_j(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \\ &\rightarrow\; \{u\}\{v\}^T = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1. 5}$$

6. 正規直交基底のテンソル積の演算ルール

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) = \delta_{jk}\boldsymbol{e}_i\,, \quad \boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ki}\boldsymbol{e}_j \tag{1. 6}$$

7. ベクトルのテンソル積

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{u}\;,\quad \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} \tag{1. 7}$$

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{z}) \tag{1. 8}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}&=\Big((u_i\boldsymbol{e}_i)\otimes(v_j\boldsymbol{e}_j)\Big)(w_k\boldsymbol{e}_k)=u_iv_jw_k\Big((\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k\Big)=u_iv_jw_k\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i=u_iv_jw_j\boldsymbol{e}_i\\ &\to\left(\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{Bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{Bmatrix}\right)\end{aligned} \tag{1. 9}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{z})&=\Big((u_i\boldsymbol{e}_i)\otimes(v_j\boldsymbol{e}_j)\Big)((w_k\boldsymbol{e}_k)\otimes(z_l\boldsymbol{e}_l))=u_iv_jw_kz_l(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l)\\ &=u_iv_jw_kz_l\delta_{jk}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_l)=u_iv_jw_jz_l(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_l)=v_jw_ju_iz_l(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_l)\\ &\to\left(\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{Bmatrix}\right)\left(\begin{Bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}z_1 & z_2 & z_3\end{Bmatrix}\right)=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{Bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}z_1 & z_2 & z_3\end{Bmatrix}\\ &=\left(\begin{Bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{Bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}z_1 & z_2 & z_3\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{1. 10}$$

8. 二階テンソルの内積（テンソル積の内積）

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}):(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) \tag{1. 11}$$

二つの二階テンソルの内積は以下のとおり．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}&=[A_{ij}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)]:[B_{kl}(\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l)]=A_{ij}B_{kl}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j):(\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l)\\ &=A_{ij}B_{kl}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_l)=A_{ij}B_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}\\ &=A_{ij}B_{ij}\end{aligned} \tag{1. 12}$$

9. 恒等テンソルとの内積，行列のトレース演算

恒等テンソル:　$\boldsymbol{I} = \delta_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$

恒等テンソルとの内積は行列のトレース（対角項の和）になる！

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I} : \boldsymbol{A} &= [\delta_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)] : [A_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)] = \delta_{ij}A_{kl}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) : (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) \\ &= \delta_{ij}A_{kl}((\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l) = \delta_{ij}A_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} \\ &= A_{ii} = \mathrm{tr}[A] \end{aligned} \tag{1. 13}$$

10. ベクトル（一階テンソル）の成分：$x_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i$

$$\forall \boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i \ ,$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i = (x_k \boldsymbol{e}_k) \cdot \boldsymbol{e}_i = x_k (\boldsymbol{e}_k) \cdot \boldsymbol{e}_i = x_k \delta_{ki} = x_i$$

$$\therefore \ x_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i \tag{1. 14}$$

11. 二階テンソルの成分：$A_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j$

$$\forall \boldsymbol{A} = A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \ ,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j &= \boldsymbol{e}_i \cdot [A_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)]\,\boldsymbol{e}_j = A_{kl}\Big(\boldsymbol{e}_i \cdot [(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)\boldsymbol{e}_j]\Big) \\ &= A_{kl}\delta_{jl}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k) = A_{kl}\delta_{jl}\delta_{ik} = A_{ij}\end{aligned}$$

$$\therefore \ A_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j \tag{1. 15}$$

12. 二階テンソルの転置テンソル

[定義]：二階テンソル $\boldsymbol{A}$ があるとき，$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} \tag{1. 16}$$

を満たすテンソル $\boldsymbol{A}^T$ が一意に存在する．これを $\boldsymbol{A}$ の転置テンソルという．

$\boldsymbol{A} = A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$ のとき，

$$\boldsymbol{A}^T = A_{ji}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = A_{ij}(\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i) \ , \quad \therefore \ A^T_{ij} = A_{ji} \tag{1. 17}$$

実際，

$$A^T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = A_{ji} \tag{1. 18}$$

13. 転置テンソルと恒等テンソルを用いた二階テンソルの内積の表現

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{I} : \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B} \ (= \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T : \boldsymbol{I}) \\
&= [\delta_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)] : [A_{lk}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)][B_{mn}(\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n)] \\
&= \delta_{ij} A_{lk} B_{mn} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) : [(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n)] \\
&= \delta_{ij} A_{lk} B_{mn} \delta_{lm} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) : (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_n) \\
&= \delta_{ij} A_{lk} B_{mn} \delta_{lm} \delta_{ik} \delta_{jn} \\
&= A_{li} B_{li} = A_{ij} B_{ij} \\
&= \mathrm{tr}\left([A]^T [B]\right) \qquad (1.\ 19)
\end{aligned}
$$

2　練習あるのみ！

2.1　眼力をつける

ボールド体・行列表記・指標の関係

$$\text{一階テンソル（ベクトル）：}\quad \boldsymbol{u} \rightarrow \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \rightarrow u_i \text{（成分の代表）} \tag{2. 1}$$

$$\text{二階テンソル：}\quad \boldsymbol{A} \rightarrow [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A_{ij} \text{（成分の代表）} \tag{2. 2}$$

[練習その１]（例）$\boldsymbol{Au} \rightarrow [A]\{u\} \rightarrow A_{ij}u_j$（総和規約）

1. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \rightarrow ?$
2. $\boldsymbol{AB} \rightarrow ?$
3. $\boldsymbol{ABu} \rightarrow ?$
4. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B} \rightarrow ?$
5. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Bu} \rightarrow ?$
6. $\boldsymbol{AB}^T \rightarrow ?$
7. $\boldsymbol{AB}^T\boldsymbol{u} \rightarrow ?$
8. $\boldsymbol{ABC} \rightarrow ?$
9. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{BC} \rightarrow ?$
10. $\boldsymbol{AB}^T\boldsymbol{C} \rightarrow ?$
11. $\boldsymbol{ABC}^T \rightarrow ?$
12. $\boldsymbol{Au}\cdot\boldsymbol{v} \rightarrow ?$
13. $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{Av} \rightarrow ?$
14. $\boldsymbol{Au}\cdot\boldsymbol{Bv} \rightarrow ?$

[練習その２]（例）$A_{ij}u_j$（総和規約）$\rightarrow$ $[A]\{u\}$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{Au}$

1. $A_{ji}u_j \rightarrow ?$
2. $A_{ik}B_{kj} \rightarrow ?$
3. $A_{ik}B_{kj}u_j \rightarrow ?$
4. $A_{ki}B_{kj} \rightarrow ?$
5. $A_{ki}B_{kj}u_j \rightarrow ?$
6. $A_{ik}B_{jk} \rightarrow ?$
7. $A_{ik}B_{jk}u_j \rightarrow ?$
8. $A_{ik}B_{kl}C_{lj} \rightarrow ?$
9. $A_{ki}B_{kl}C_{lj} \rightarrow ?$
10. $A_{ik}B_{lk}C_{lj} \rightarrow ?$
11. $A_{ik}B_{kl}C_{jl} \rightarrow ?$
12. $A_{ij}u_jv_i \rightarrow ?$
13. $u_iA_{ij}v_j \rightarrow ?$
14. $A_{ij}u_jB_{ik}v_k \rightarrow ?$

[練習その３]（例）$\boldsymbol{Au} \;\rightarrow\; [A_{ik}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k)]\left(u_j \boldsymbol{e}_j\right) = A_{ik}u_j(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_j = A_{ik}u_j\delta_{kj}\boldsymbol{e}_i = A_{ij}u_j\boldsymbol{e}_i$

（考察）：$A_{ij}u_j\boldsymbol{e}_i$ では i, j ともにダミー指標．ここで，基底 $\boldsymbol{e}_i$ を隠す（取る）と $A_{ij}u_j$ であり，i は自由指標になる．すなわち，**自由指標は隠されている基底に対応する成分を表している！**．

1. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}$ =?
2. $\boldsymbol{AB}$ =?
3. $\boldsymbol{ABu}$ =?
4. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$ =?
5. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Bu}$ =?
6. $\boldsymbol{AB}^T$ =?
7. $\boldsymbol{AB}^T\boldsymbol{u}$ =?
8. $\boldsymbol{ABC}$ =?
9. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{BC}$ =?
10. $\boldsymbol{AB}^T\boldsymbol{C}$ =?
11. $\boldsymbol{ABC}^T$ =?
12. $\boldsymbol{Au} \cdot \boldsymbol{v}$ =?
13. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{Av}$ =?
14. $\boldsymbol{Au} \cdot \boldsymbol{Bv}$ =?