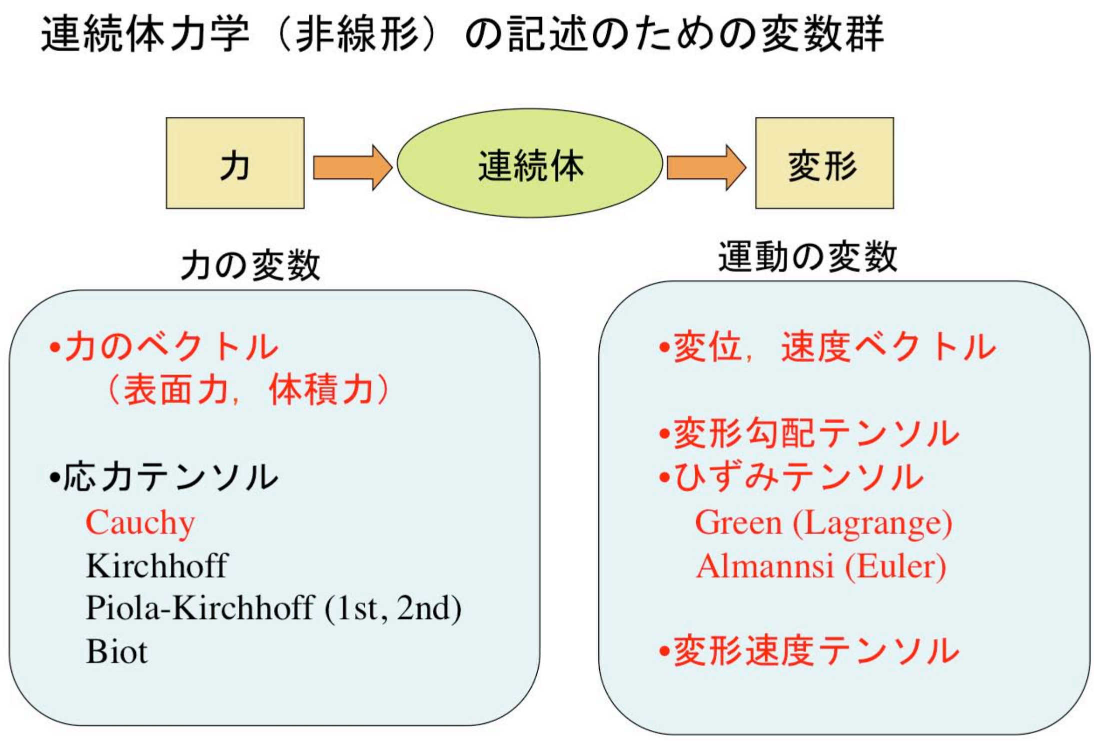
連続体力学（その6）

・仮想仕事式
・種々の応力テンソル



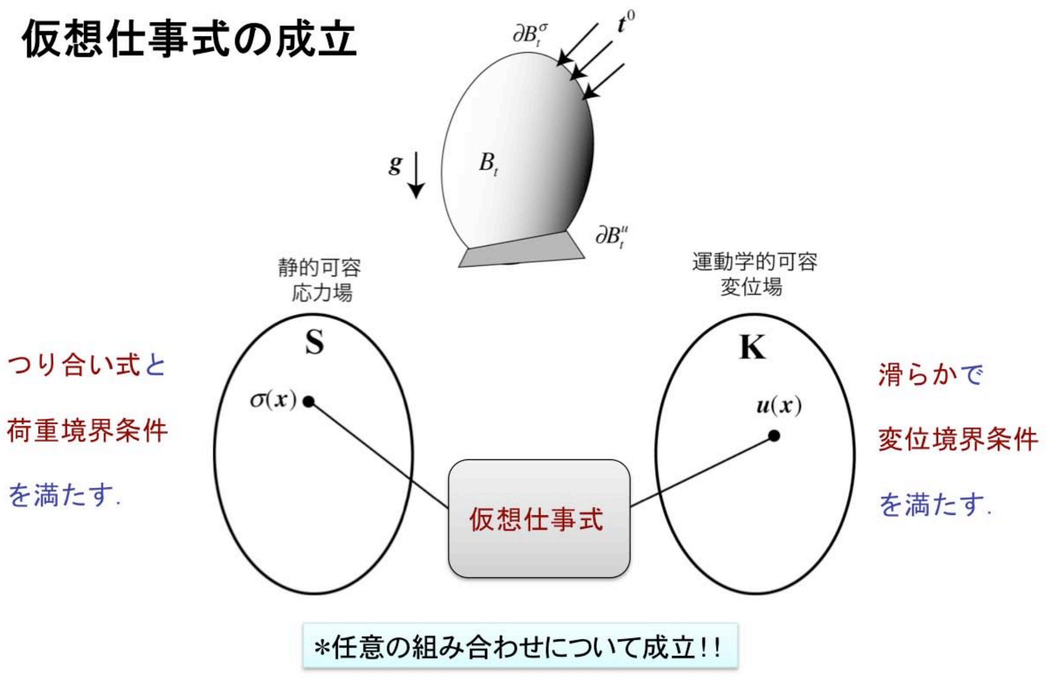
・・・以上，運動の変数についての話を終える．次は再び力の変数に戻る．

その前に，まず次の話が唐突と思われないように・・・・・以下は前置き．

先に，「力の変数と運動の変数には対応関係があって，適当な内積演算によって仕事量を表す」ことを述べた．実は，Cauchy応力と速度勾配テンソル（あるいは変位勾配テンソル）を用いると，それらの内積は内部仮想仕事を表していて，そして，それは外力がなす仮想仕事に等しいという「仮想仕事式」に自然に導かれる．

ここで，「仮想」の意味は，力の変数と運動の変数は形式的に対応しているだけで，「運動の変数」は実際に「力の変数」が作用した結果である必要はない．また，仮想仕事式が「自然に導かれる」というのは，「ガウスの発散定理」と呼ばれる積分公式による数学的事実として導かれるということである．

その仮想仕事式の意味するところを変えずに，物体の変形を表す運動の変数と，その原因となる力の変数を色々と変えることを考えるのである．すると，図中に未だ黒字で示している力の変数が現れ，それらの意味が「仕事率」のもとで明解になる．

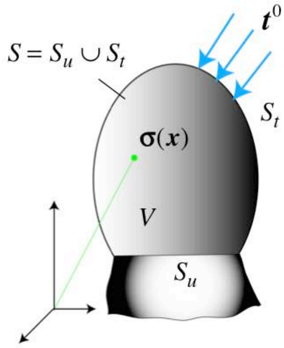


仮想仕事式の成立

・仮想仕事式は任意の静的可容応力と運動学的可容変位の組み合わせについて成立

　無限通りある静的可容応力と，同じく無限通りある運動学的可容変位の中から任意に一組の組み合わせを選ぶと，それらについて仮想仕事式が恒等式として成立する．静的可容応力と運動学的可容変位が構成則で関係づけられている必要はない．それは恒等式として成立する数学的な事柄である．

仮想仕事式



・つり合い式に任意のベクトル関数を内積してもゼロ

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) w_i \, dV = 0 \quad \text{for} \quad \forall w_i, w_i = 0 \text{ on } S_u$$

・積の微分公式と発散定理の利用

・応力テンソルとの内積では対象部分だけが寄与

$$\Rightarrow \quad \int_S \sigma_{ik} w_i n_k \, dS - \int_V \sigma_{ik} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) \right] dV + \int_V \rho b_i w_i \, dV = 0$$

・荷重境界条件と任意ベクトルの境界条件

$$\sigma_{ik} n_k = t_i^0 \text{ on } S_t \text{ , } w_i = 0 \text{ on } S_u$$

（つり合い式）

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 \quad \text{in} \quad V$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^0 \quad \text{on} \quad S_t$$

（仮想仕事式）

$$\int_V \sigma_{ik} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) \right] dV = \int_{S_t} t_i^0 w_i \, dS + \int_V \rho b_i w_i \, dV$$

物理ではなく数学として成立

仮想仕事式

・つり合い式に任意のベクトル関数を内積してもゼロ（弱形式）

ゼロであるつり合い式（ベクトル式である）に任意のベクトル関数を内積してもゼロである．そのとき，任意のベクトル関数は変位境界上でゼロとなるようなものという若干の制約をつけておく．

・積の微分公式，対称テンソルと反対称テンソルの内積がゼロとなること

積の微分公式は高校で習ったスカラー関数と同じ．対称テンソル（応力）と反対称テンソルの内積はゼロになることは，連続体力学でしばしば用いられる基本的な数学的事実．

・ガウスの発散定理，境界条件の適用

先に積の微分公式を使ったのはここでガウスの発散定理を適用するため．「任意ベクトルを応力で変換し，その後に外向き法線ベクトルと内積する」という式が得られるが，応力テンソル（行列）が対称なので，「法線ベクトルを応力で変換し，それから任意ベクトルと内積する」ことに等しい．線形代数の教科書に出ている基本的な事柄である．

荷重境界条件と任意ベクトルが変位境界上でゼロであることを適用して最終的な式を得る．この積分の等式を仮想仕事式という．以上のプロセスをつり合い式の弱形式化といい，得られた式を元の微分方程式の弱形式と呼ぶこともある．仮想仕事式は，つり合い式の弱形式である．

・つり合い式から仮想仕事式へ

・・・という具合に，右に示したプロセスによってつり合い式から仮想仕事式を得た．ここで，**（１）応力がつり合い式と荷重境界条件を満たしていて，（２）変位境界でゼロとなる任意ベクトル関数が微分可能・・・**でさえあれば仮想仕事式が誘導できることに気付いて欲しい．

仮想仕事式の誘導の道具

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} w_i \text{ の体積積分} \qquad \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dV$$

(1) 積の微分公式と発散定理の利用，偏導関数の体積積分を表面積分に

$$\boxed{\int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} w_i \, dV} = \int_V \left(\frac{\partial(\sigma_{ik} w_i)}{\partial x_k} - \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \right) dV = \boxed{\int_S \sigma_{ik} w_i n_k \, dS - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} dV}$$

(2) 対称テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ との内積には対称部分だけが寄与する

$$\sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} = \sigma_{ik} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} - \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) \right] = \sigma_{ik} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) \right] = \sigma_{ik} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} \right)_{Sym.}$$

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \boxed{w_i} \, dV = \int_S \sigma_{ik} w_i n_k \, dS - \int_V \sigma_{ik} \boxed{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) \right]} dV$$

仮想仕事式の誘導の道具

・応力テンソルの発散と任意のベクトルの内積，その体積積分

仮想仕事式は数学的な事実（恒等式）としてつり合い式から誘導される．その際に必要な式展開の知識がこれである．

（１）積の微分公式を使う．すると偏導関数の体積積分が現れるのでその部分を表面積分にする．

（２）ベクトルの勾配によって得られる二階のテンソルは，対称なCauchy応力テンソルとの内積においては対称部分だけが寄与する．なぜならば，任意の二階のテンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和に分解できる．そして，対称テンソルと反対称テンソルのの内積はゼロだから．

（３）表面積分の中味にはCauchyの式snが現れる．それを表面力ベクトルtに書き換える．

最終的に，

「内積：（表面力）ｘ（ベクトルw）」　＋「内積：（応力テンソル）ｘ（wの勾配テンソルの対称部分）」

になることを理解する．ベクトルwは微分可能であれば何でも良い．ベクトルwが変位ベクトルならば勾配の対称部分は微少ひずみテンソル，速度ベクトルならば勾配の対称部分は変形速度テンソルと呼ばれるものになる．

微小ひずみテンソルと微小回転テンソル

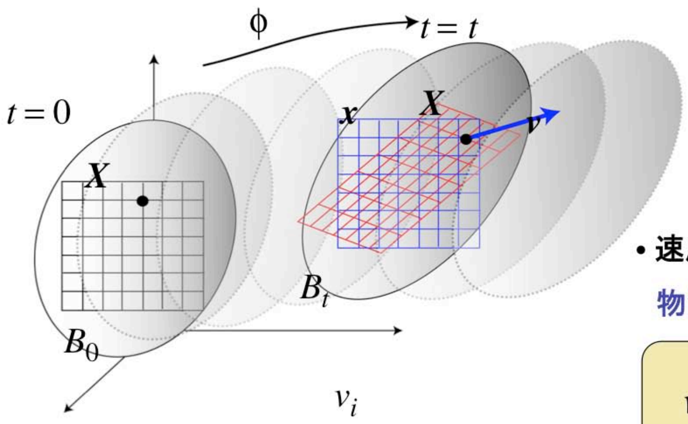
変位勾配テンソル

$$\nabla \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{対称部分}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{反対称部分}}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad \omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

微小ひずみテンソル　　微小回転テンソル

速度ベクトル



• 速度ベクトル：

物質点 $\boldsymbol{X}$ の速度ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\phi}(\boldsymbol{X}, t) = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t}$$

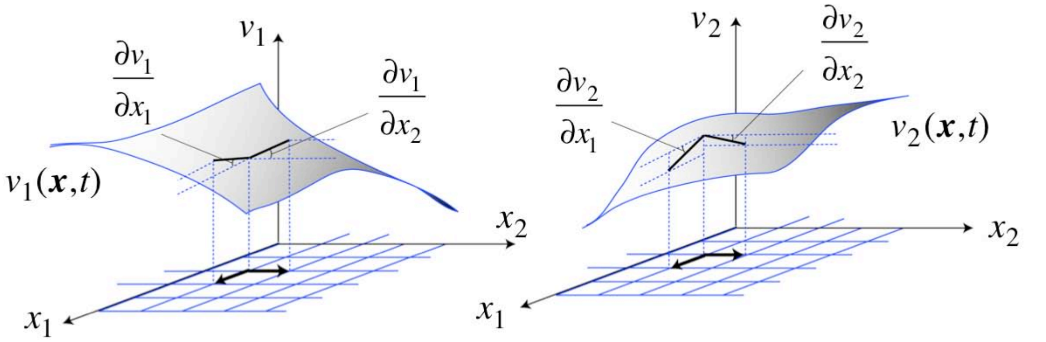
→ 物体が占める領域に
ベクトル場を形成

速度ベクトル

・物質点の速度ベクトル

物体が運動している時，物体を構成している物質点はある速度ベクトルを持つ．それは図中の四角で囲んだ運動関数の時間微分で与えられる．この速度ベクトルは変位ベクトルと同様，物体が占める領域上のベクトル値関数（ベクトル場）になる．

速度勾配テンソルと変形速度テンソル



$$\boldsymbol{l} \equiv \nabla \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}$$

• 速度勾配テンソル
(velocity gradient tensor)

$$d \equiv \frac{1}{2}(l + l^T) = \frac{1}{2}\left[(\nabla \boldsymbol{v}) + (\nabla \boldsymbol{v})^T\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}) + (\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1})^T\right]$$

• 変形速度テンソル
(rate of deformation tensor)

速度勾配テンソルと変形速度テンソル

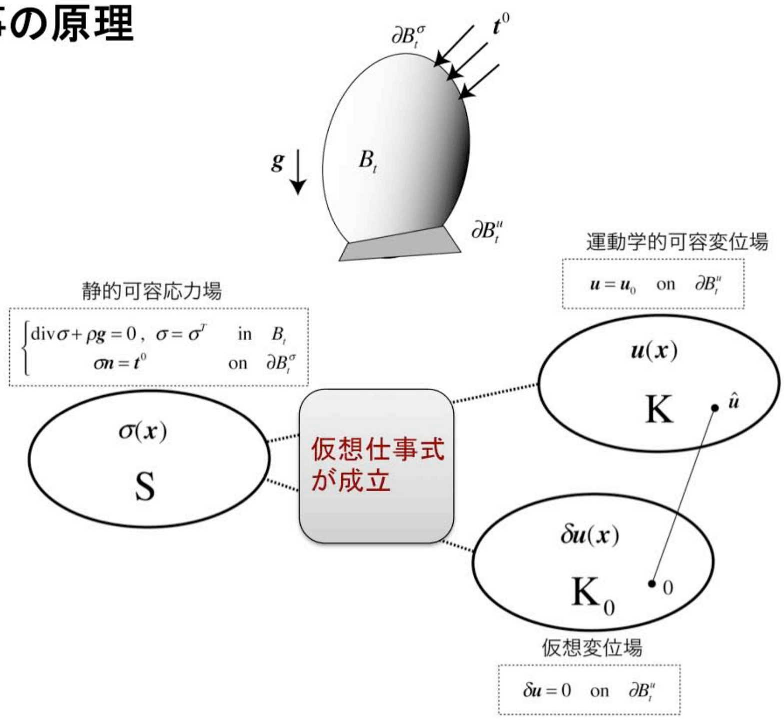
・速度勾配テンソル

速度ベクトルの空間座標による勾配テンソルを「**速度勾配テンソル**」と呼ぶ．空間座標xに関する勾配（位置変数による微分）であることが変形勾配テンソルFとは異なる点である（Fは物質座標Xに関する勾配であった）．具体的には速度ベクトルを空間表示し，各成分の空間座標xに関する合計９つの偏導関数を求め，それらを図中の式のように並べたものである．各成分が表すのは，速度ベクトル成分を空間表示した時の関数曲面における接平面の勾配である．

・変形速度テンソル

速度勾配テンソルの対称部分を「**変形速度テンソル**」という．変形速度テンソルの重要な役割は，Cauchy応力との組み合せによって「仕事率」を表すことにある．ちなみに，反対称部分は「**スピンテンソル**」という．

仮想仕事の原理



仮想仕事の原理

・仮想変位

任意の運動学的可容変位ベクトル場に「**それ**」を加えても，その結果として生じるベクトル場がやはり運動学的可容変位ベクトル場であるような「**それ**」を「**仮想変位**」あるいはという．運動学的可容場という大事な性質は変わらないから，「それ」分の変化を任意の運動学的可容に対して考えても（仮想しても）よい，という意味．「**仮想変位**」は，変位境界においてゼロベクトルであるような滑らかな変位ベクトル場であり，運動学的可容変位場を平行移動したベクトル場として与えられる．言い換えれば，仮想変位は**対象とする問題の変位境界条件が変位固定の場合に対応する運動学的可容変位場である．**

・仮想仕事の原理

仮想仕事式は，静的可容応力と運動学的可容変位の任意の組み合わせについて成立する．そして，同様に仮想変位も変位境界上で変位ゼロの固定条件を満たす運動学的可容変位とみなせるから，任意の静的可容応力との組み合わせで仮想仕事式が成立する．

成立した式は「仮想的変位について静的可容応力が成す内部仮想仕事は，外力が成す外部仮想仕事に等しい」ことを表すと解釈できる．静的可容応力と仮想変位が満たすこの恒等式をこのように解釈するとき「仮想仕事の原理」と言う．仮想仕事の原理は材料の性質が不在の状態で成立する．最小ポテンシャルエネルギー原理とは決定的に意味が違うことに注意．その辺りがゴッチャになっている教科書を昔見たことがある．もし，手元にそんな教科書があったら廃品回収に出した方がよい．

仮想仕事式（その３）　$\boldsymbol{\sigma}$ と仕事に関して共役な変形指標

$$\int_V \sigma_{ik}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k}+\frac{\partial w_k}{\partial x_i}\right)\right]dV = \int_{S_t} t_i^0 w_i\ dS + \int_V \rho b_i w_i\ dV$$

$\boldsymbol{w} = \delta\boldsymbol{u}$ ：仮想変位ベクトル　$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)=\varepsilon_{ij}$

$$\int_V \sigma_{ik}\delta\varepsilon_{ij}\ dV = \int_{S_t} t_i^0 \delta u_i\ dS + \int_V \rho b_i \delta u_i\ dV$$

$\boldsymbol{w} = \delta\boldsymbol{v}$ ：仮想速度ベクトル　$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)=d_{ij}$

$$\int_V \sigma_{ik}\delta d_{ij}\ dV = \int_{S_t} t_i^0 \delta v_i\ dS + \int_V \rho b_i \delta v_i\ dV$$

仮想仕事式（その3）

・任意ベクトルとして変位ベクトルを取る．今の場合，応力とは無関係に選べて，変位境界上ではゼロとなるような変位なので仮想変位を選ぶというのが正しい．そうすると，応力との内積になる偏微分の対称部分は微小ひずみだから，微小ひずみ論における「内部仮想仕事は外部仮想仕事に等しい」という仮想仕事の式になる．

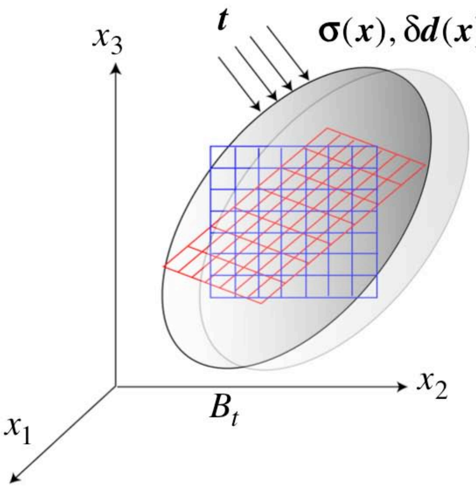
・任意ベクトルとして速度ベクトルを取る．上と同様に，応力とは無関係に選べて，変位境界上ではゼロとなるような速度なので仮想速度をというのが正しい．そうすると，応力との内積になる偏微分の対称部分は変形速度テンソルだから，「内部仮想仕事率は外部仮想仕事率に等しい」という仮想仕事率の式になる．

・連続体に対して，外力が成す仕事あるいは仕事率は右のように表されることは確かである．そして，それと等号で結ばれるようなCauchy応力が成す内部仕事（率）を与える物理的に意味を持つベクトル量はこれ以外に選ぶことができない．この意味で，微小ひずみテンソルと変形速度テンソルはCauchy応力と仕事に関して共役なテンソルという．

・この二つめの仮想仕事率の式を基本として，意味のある種々の応力が導入される．

□

仮想仕事式（単位時間当たりの仕事＝仕事率に関して）



$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}), \delta\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$ ： B_t 上のテンソル場

$$W_{\mathrm{int}} = \int_{B_t} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{d}\, dv \quad \text{（内部仮想仕事率）}$$

$$= \int_{B_t} \boldsymbol{f} \cdot \delta\boldsymbol{v}\, dv + \int_{\partial B_t} \boldsymbol{t} \cdot \delta\boldsymbol{v}\, da = W_{\mathrm{ext}}$$

（外部仮想仕事率）

（内部仮想仕事率）＝（外部仮想仕事率）

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ と $\delta\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$ は互いに無関係でも成立.

→ 等式は仮想仕事式 とも呼ばれる.

＊ $\delta\boldsymbol{d}, \delta\boldsymbol{v}$ は応力とは無関係な仮想の量である.

仮想仕事式（単位時間あたりの仕事＝仕事率に関して）

・Cauchy応力と変形速度テンソルの内積

Cauchy応力テンソルと変形速度テンソルを空間表示された関数として扱う（これらのテンソルの定義ではそれが判りやすい）．これらは現在時刻において物体が占める領域B_t上のテンソル場である.

これらの内積（２階テンソルの内積）を取り物体全体にわたって積分をすると，Gaussの発散定理を用いて定番となっている式変形により，それが右辺に見るような，体積力と表面荷重がなす外部仮想仕事率に等しいことが自然に導かれる．すなわち，Cauchy応力テンソルと変形速度テンソルの内積は，単位時間の内部仮想仕事（内部仮想仕事率）を表すことが判る.

この式は応力と変形速度テンソル，および外力と変位の組み合わせが，実際の物体において実現していなくとも成立する．その意味で「仮想」の仕事率であり，等式は「仮想仕事式」とも呼ばれる．通常は運動の変数にdをつけて，それが応力とは無関係（応力の作用によって実現する量とは限らないという意味）であることを表す.

・実は，変位と微小ひずみについても成立.

変形速度テンソルの代わりに，微小ひずみテンソルを用いると，同様の式変形をたどることができる． Cauchy応力テンソルと微小ひずみテンソルの内積によって与えられる内部仮想仕事は，外力が成す仮想仕事に等しいという式が導かれる.

Cauchy応力テンソルとの組み合わせによって内部仮想仕事を表すことができる微小ひずみ，ひずみ速度テンソルの共通点は，それが変位（または速度）ベクトルの導関数の対称部分として与えられていることである．そのことが本質的であることは，Appendix（ガウスの発散定理，仮想仕事式の誘導）を参照のこと.

種々の応力と変形指標の組み合わせ（仮想仕事式の書き換え）

- 種々の物理量は物質点の属性なので，位置の変数として変形前の $\boldsymbol{X}$ を選ぶと便利なことがある．

(1) 位置の変数を変換　$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{X} = \phi^{-1}(\boldsymbol{x}, t)$

- 積分領域：　$B_t \rightarrow B_0$
- 体積要素：　$dv \rightarrow dV \quad (\because dv = J\,dV)$
- 面積要素：　$da \rightarrow dA \left(\because da = \left(J \big/ \sqrt{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{n}}\right) dA\right)$

$$\int_{B_t} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{d}\, dv = \int_{B_t} \boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v}\, dv + \int_{\partial B_t} \boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{v}\, da$$

（左辺）$= \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma} : (\delta\boldsymbol{d} J)\, dV$

（右辺）$= \int_{B_0} J\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v}\, dv + \int_{\partial B_0} \dfrac{J}{\sqrt{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{n}}}\, \boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{v}\, da$

$$\int_{B_0} \boldsymbol{\tau} : \delta\boldsymbol{d}\, dV = \int_{B_0} \boldsymbol{f}_0\cdot\delta\boldsymbol{v}\, dV + \int_{\partial B_0} \boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{v}\, dA$$

$\because \boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$　: Kirchhoff 応力

種々の応力と変形指標の組み合わせ（仮想仕事式の書き換え）

（１）位置の変数の変換（積分の変数変換：現在配置から基準配置へ）

仮想仕事式の中にある関数について，空間表示から物質表示に書き換え，積分変数もxからXへ書き換える．この作業は，先に学んだ体積要素および面積要素の変換式を用いて機械的に行うことができ，仮想仕事式は，現在配置上の積分から基準配置上の積分の式に書き換えられる．

・Kirchhoff（キルヒホッフ）応力テンソル

図中の四角で囲んだ式は，そのようにして積分領域を基準配置に書き換えた仮想仕事式である．左辺を見ると，運動の変数としては変形速度テンソルがそのまま残っているが，力の変数としてはCauchy応力をヤコビアン(J)倍したテンソルになっている．このテンソルのことをKirchhoff（キルヒホッフ）応力テンソルという．

右辺にある体積力ベクトル，表面荷重ベクトルもそれぞれヤコビアン(J)倍されている．また，運動の変数である左辺の変形速度テンソルと右辺の速度ベクトルは，関数として空間表示から物質表示に書き換えて扱われる．

(2) 左辺に $\delta\dot{F}$ が現れるように書き換える.

- **積分領域：** $B_t \to B_0$
- **体積要素：** $dv \to dV \quad (\because dv = J\,dV)$
- **面積要素：** $da \to dA \quad (\because da = \left(J\big/\sqrt{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{n}}\right)dA)$

$$\int_{B_t} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{d}\,dv = \int_{B_t} \boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v}\,dv + \int_{\partial B_t} \boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{v}\,da$$

$$(\text{左辺}) = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma} : (\delta\boldsymbol{d}J)dV = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma} : (\delta\boldsymbol{l}J)dV$$

$$= \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma} : (\delta\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}J)dV = \int_{B_0} (J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}) : \delta\dot{\boldsymbol{F}}\,dV$$

（右辺）：(1)と同じ

$$\int_{B_0} \boldsymbol{P} : \delta\dot{\boldsymbol{F}}\,dV = \int_{B_0} \boldsymbol{f}_0\cdot\delta\boldsymbol{v}\,dV + \int_{\partial B_0} \boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{v}\,dA$$

$\because \boldsymbol{P} = J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}$ ：1st Piola-Kirchhoff 応力

（２）左辺に変形勾配テンソルFの時間微分が現れるように書き換える（物体内部の運動の変数にFを選ぶ）．

・1st Piola-Kirchhoff（第１ピオラ-キルヒホッフ）応力テンソル

仮想仕事式から出発して，（１）と同じように位置の変数を書き換えて，基準配置を積分領域とする式にする．そして，左辺の内部仕事率を表す積分においては，運動の変数として変形勾配テンソルFの時間微分を用いる．そのようにすると，図中に示した式変形を経て，四角で囲んだ式に至る．

式に見るとおり，変形勾配テンソルFの時間微分に対しては，力の変数として式中Pと表しているテンソルが対応することになる．このテンソルを1st Piola-Kirchhoff（第１ピオララーキルヒホッフ）応力テンソルという．公称応力テンソル（nominal stress tensor）とも呼ばれる．

(3) 左辺に $\delta\dot{E}$ が現れるように書き換える.

• 積分領域： $B_t \to B_0$ • 体積要素： $dv \to dV \quad (\because dv = J\,dV)$

• 面積要素： $da \to dA \quad \left(\because da = \left(J\big/\sqrt{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{n}}\right)dA\right)$

$$\int_{B_t} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{d}\,dv = \int_{B_t} \boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v}\,dv + \int_{\partial B_t} \boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{v}\,da$$

（左辺） $= \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma} : (\delta\boldsymbol{d}J)dV$

$$= \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{F}^{-T}\delta\dot{\boldsymbol{E}}\,\boldsymbol{F}^{-1}J)dV = \int_{B_0} (J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}) : \delta\dot{\boldsymbol{E}}\,dV$$

（右辺）：(1)と同じ

$$\int_{B_0} \boldsymbol{S} : \delta\dot{\boldsymbol{E}}\,dV = \int_{B_0} \boldsymbol{f}_0\cdot\delta\boldsymbol{v}\,dV + \int_{\partial B_0} \boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{v}\,dA$$

$\because \boldsymbol{S} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}$ ：2nd Piola-Kirchhoff 応力

（３）左辺にGreenのひずみテンソルEの時間微分が現れるように書き換える（物体内部の運動の変数にEを選ぶ）.

・2nd Piola-Kirchhoff（第２ピオラ-キルヒホッフ）応力テンソル

仮想仕事式から出発して（１）と同じように位置の変数を書き換えて基準配置を積分領域とすることは（２）と同じ．今度は左辺の内部仕事率を表す積分において，運動の変数としてGreenのひずみテンソルEの時間微分を用いる．そして，図中に示した式変形を経て四角で囲んだ式に至る．

式に見るとおり， GreenのひずみテンソルEの時間微分に，力の変数としてSと表されているテンソルが対応することになる．このテンソルを2nd Piola-Kirchhoff（第２ピオラーキルヒホッフ）応力テンソルという．

(4)　(3)を手掛かりに左辺に $\delta\dot{U}$ が現れるように書き換える.

$$\delta\dot{E} = \frac{1}{2}(\delta\dot{U}U + U\delta\dot{U}) \quad \text{だから}$$

(3)の（左辺） $\displaystyle\int_{B_0} S : \delta\dot{E}\,dV = \int_{B_0} S : \frac{1}{2}(\delta\dot{U}U + U\delta\dot{U})\,dV$

$$= \int_{B_0} \frac{1}{2}(SU + US) : \delta\dot{U}\,dV$$

$$\int_{B_0} T : \delta\dot{U}\,dV = \int_{B_0} f_0 \cdot \delta v\,dV + \int_{\partial B_0} T \cdot \delta v\,dA$$

$\because T = \frac{1}{2}(SU + US)$　: Biot の応力

（４）左辺に右コーシーグリーンテンソルUの時間微分が現れるように書き換える（物体内部の運動の変数にUを選ぶ）.

・Biot （ビオ）の応力テンソル

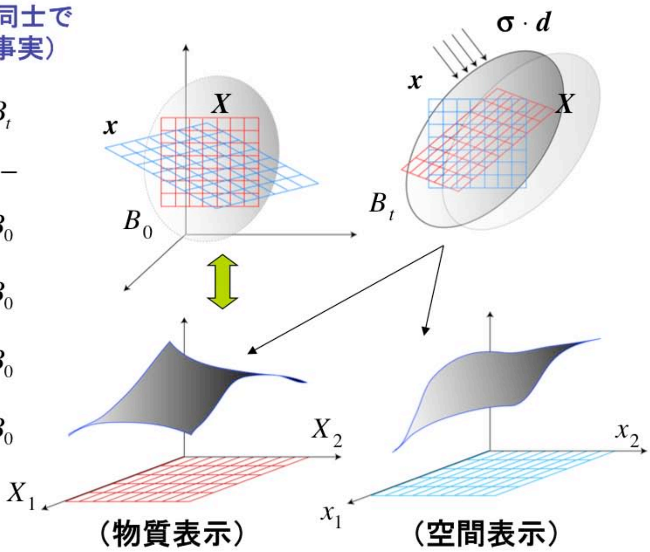
今度は（３）での式をスタートして運動の変数としてUが現れるようにする．すると，図中にあるような式変形を経て四角に囲んだ式に至る.

そして，Uの時間微分に対してはTと表されるテンソルが対応することが判る．TをBiot（ビオ）の応力テンソルという.

種々の応力と変形指標の組み合わせ（まとめ）

- 物理量は物質点の属性．位置の変数として $\boldsymbol{X}$ を選ぶと便利なことがある．(→ 実際問題からの要請）
- 運動の変数と力の変数は適当なモノ同士で対をなす．(→ 力学モデルの構造の事実）

$$
W_{\text{int}} = \begin{cases}
\int_{B_t} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{d}\, dv & (\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{d}) \quad \text{in } B_t \\
\text{------} & \text{-----} \quad \text{---} \\
\int_{B_0} \boldsymbol{\tau} : \delta \boldsymbol{d}\, dV & (\boldsymbol{\tau} \leftrightarrow \boldsymbol{d}) \quad \text{in } B_0 \\
\int_{B_0} \boldsymbol{P} : \delta \dot{\boldsymbol{F}}\, dV & (\boldsymbol{P} \leftrightarrow \dot{\boldsymbol{F}}) \quad \text{in } B_0 \\
\int_{B_0} \boldsymbol{S} : \delta \dot{\boldsymbol{E}}\, dV & (\boldsymbol{S} \leftrightarrow \dot{\boldsymbol{E}}) \quad \text{in } B_0 \\
\int_{B_0} \boldsymbol{T} : \delta \dot{\boldsymbol{U}}\, dV & (\boldsymbol{\tau} \leftrightarrow \boldsymbol{d}) \quad \text{in } B_0
\end{cases}
$$



種々の応力と変形指標の組み合わせ（まとめ）

・全ては現在配置での仮想仕事の記述

ここで記述されている内部仮想仕事（率）は，すべてが同じ現在配置における同じ内部仕事（率）を表していることに注意する．同じ仕事量を空間表示から物質表示に変えて，変形指標の変数を変えると，それに対応した様々な応力が現れるのである．

・違いは，現在の状態を「現在配置で考える」のか，あるいは「基準配置で考える」か，ということ．

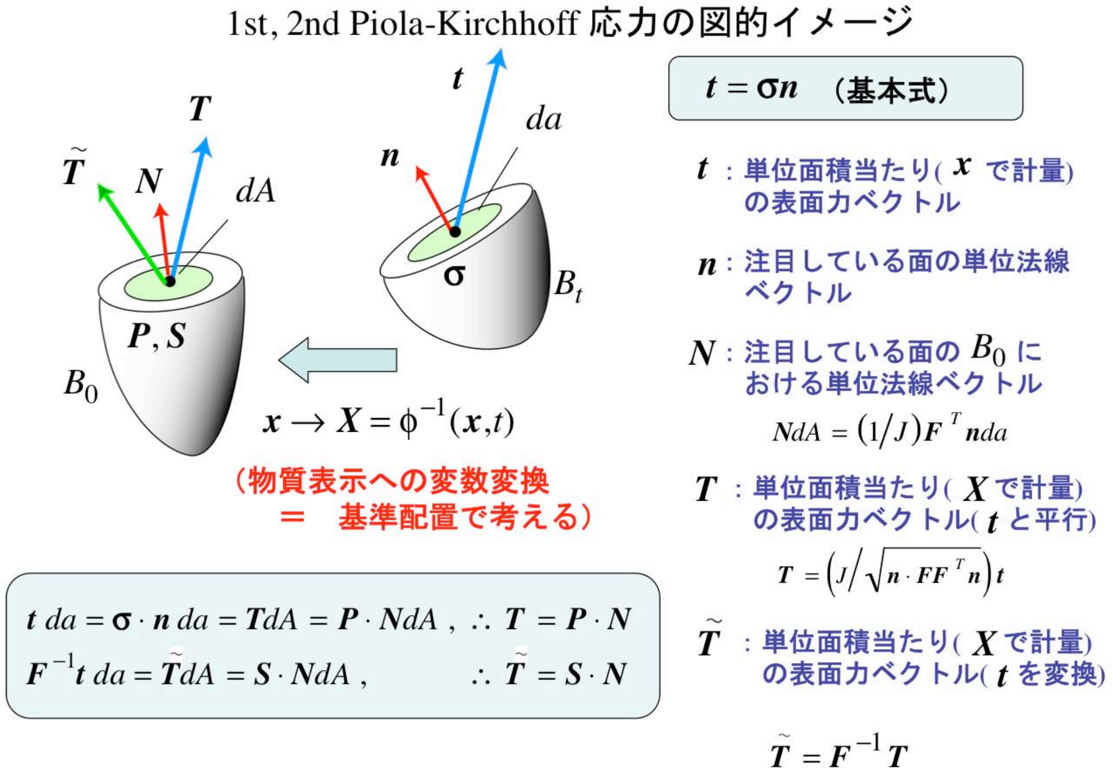
Cauchy応力は「現在配置における物体内部の力の状態」を「現在配置において考えるテンソル量」として定義されている．しがって，当然のことながら空間表示で扱うのが都合がよい．そうした量であるからこそ，運動する物体では常に（全ての瞬間において）力（動的な場合は慣性力も含めて）がつり合っているという物理法則が，まずはCauchy応力を用いて明解に記述されるのである．

それに対して，その他の応力テンソル（Kirchhoff，1st & 2nd Piola-Kirchhoff，Biot）は，同じ「現在配置における物体内部の力の状態」を「基準配置において考えるためのテンソル量」である．

・基準配置で考える応力テンソルはなぜ必要？

解くべき方程式はつり合い式である．それはCauchy応力を使って明解に記述されている．そのCauchy応力は，先に学んだように，変形後の現在配置において定義される．物体がどのように変形するかは方程式を解いてみて初めて判る．別の言い方をすれば，Cauchy応力はその量が未知であるばかりでなく，それが自体が定義される舞台である物体内部の体積要素や面積要素もあらかじめ知ることが出来ないような量である．　さらに，体積・面積要素が予め判らないので， Cauchy応力では，物体の性質を表す応力ひずみ関係式（構成則）をうまく表すことが出来ないなど不都合が多い．

それに対して，物質表示によって基準配置を参照する応力テンソルでは，作用する体積・面積要素の大きさや向きが初めから判っていることになる．したがって，実験によって調べた単位面積に作用する力と変形の関係などを構成則として記述するのに都合がよい．それがこれらの応力テンソルが使われる理由である．



1st，2nd Piola-Kirchhoff応力の図的イメージ

・面積要素上の表面力の合力に注目

現在配置B_tの一点のCauchy応力テンソルをs，その点を通る面積要素ndaに作用する表面力ベクトルをtとする．この面積要素に作用する表面力の合力ベクトルはtdaである．

ここで，座標変数をx（空間表示）からX（物質表示）に変える．それは，物理量を表す関数の定義域を現在配置から基準配置に変えるということである．注目している面積要素ndaは基準配置ではNdAになる．

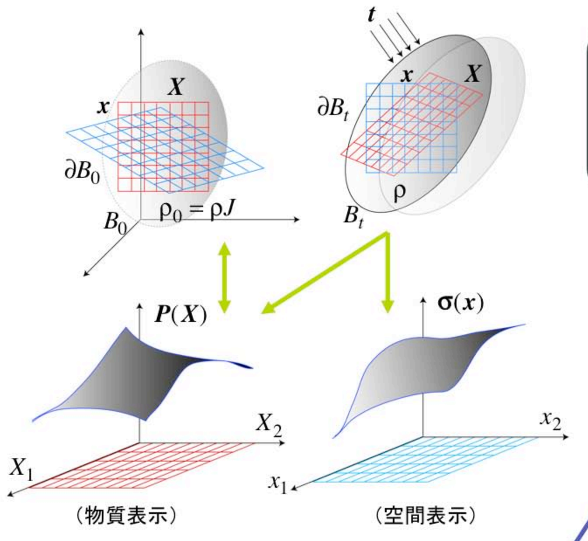
・1st Piola-Kirchhoff応力

考えている面積要素に今まさに作用している合力ベクトルtdaを，この基準配置における面積要素NdAに作用している合力として見直す．面積がdaからdAに変わっているので，その面積の比率分だけ表面力ベクトルtの大きさを調整すると基準配置における表面力ベクトルTが得られる．そして， Cauchyの式と同様にして，この表面力ベクトルTに対して面の外向き法線ベクトルNを結びつける式T=PNを成り立たせる応力テンソルが1st Piola-Kirchhoff応力である．ある面に作用している現在の表面力を，元の状態の面に作用していると換算した表面力であることからTは公称表面力，それを与えるPは公称応力とも呼ばれている．

・2nd Piola-Kirchhoff応力

注目していた合力ベクトルtdaを変形勾配テンソルFによって逆変換して，基準配置における面積要素NdAに作用する合力ベクトルであると見なすと，単位面積当たりに作用する新たな表面力ベクトルが定義される．その表面力ベクトルと外向き単位法線ベクトルNを結びつけるテンソルが2nd Piola-Kirchhoff応力である． 2nd Piola-Kirchhoff応力は物体に剛体回転を与えても変化しない量として構成則の記述に際して重宝される．

つり合い式（Cauchy応力と1st Piola-Kirchhoff応力による記述）



物体内部の現在時刻におけるつり合いを表す２つの表記法

・現在配置の物体に作用する外力はつり合っている.

$$\int_{\partial B_t} \boldsymbol{t}\, da + \int_{B_t} \rho \boldsymbol{b}\, dv = \boldsymbol{0} \quad \text{（空間表示）}$$

$$\int_{\partial B_0} \boldsymbol{T}\, dA + \int_{B_0} \rho_0 \boldsymbol{b}\, dV = \boldsymbol{0} \quad \text{（物質表示）}$$

・ガウスの発散定理の利用

$$\int_{\partial B_t} \boldsymbol{t}\, da = \int_{\partial B_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \int_{B_t} \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}\, dv$$

$$\Rightarrow \int_{B_t} (\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b})\, dv = \boldsymbol{0}$$

$$\therefore \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \quad \text{（空間表示）}$$

$$\int_{\partial B_0} \boldsymbol{T}\, dA = \int_{\partial B_0} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{N}\, dA = \int_{B_0} \nabla_X \cdot \boldsymbol{P}\, dV$$

$$\Rightarrow \int_{B_0} (\nabla_X \cdot \boldsymbol{P} + \rho_0 \boldsymbol{b})\, dV = \boldsymbol{0}$$

$$\therefore \nabla_X \cdot \boldsymbol{P} + \rho_0 \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \quad \text{（物質表示）}$$

つり合い式（Cauchy応力と1st Piloa-Kirchhoff応力による記述）

・現在配置における物体に作用する外力のつり合い

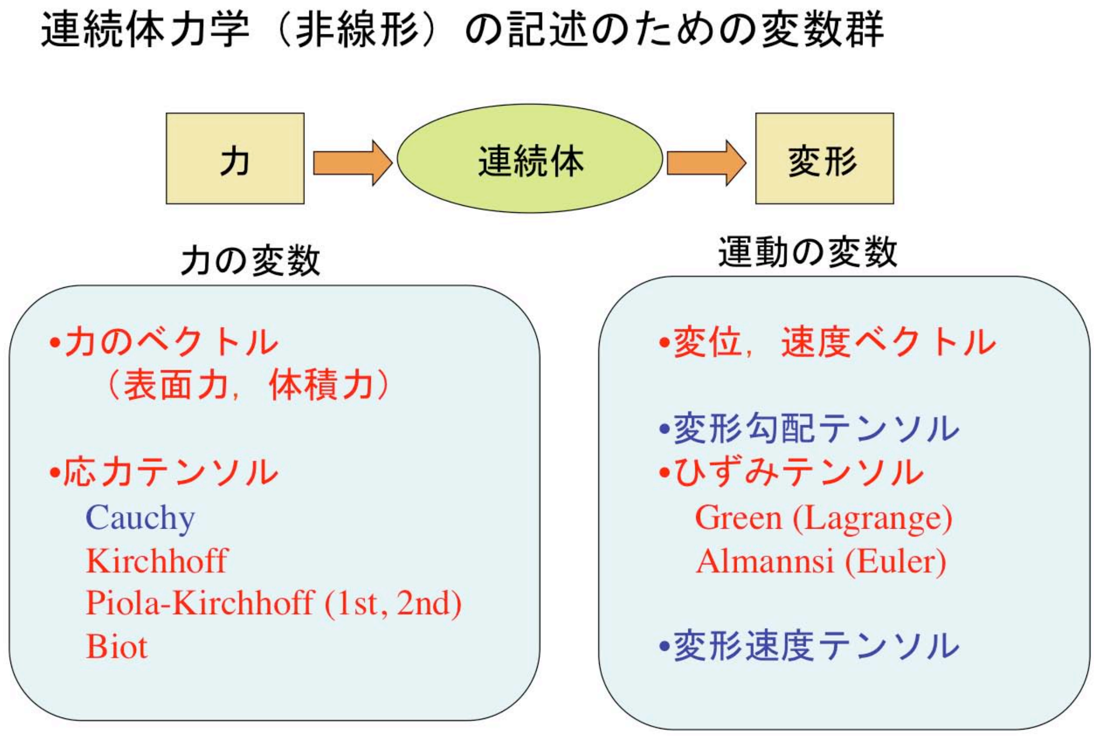
現在配置において物体に作用する外力は表面荷重と体積力（重力）である．物体が静止しているとすると，それらはつり合っていなければならない．そのつり合い式は，まずは「空間表示」すると判りやすい．それは物理量を空間座標の関数として見ることである．関数の定義域は現在配置B_tである．

同じ外力のつり合い式を変数変換して「物質表示」しても意味は変わらない．物質表示の式は，先に見た1st Piola-Kirchhoff応力と表面力ベクトルの関係を参照して得られる．「物質表示」するということは物理量を物質座標（物質点のラベル）の関数として見ることである．そして，そのとき関数の定義域は基準配置B_0になる．

・ガウスの発散定理の適用によるつり合い式の誘導

表面力ベクトルと応力テンソルの関係式を用い，さらに，空間座標および物質座標それぞれにガウスの発散定理を用いると，空間表示の式では空間座標xによる発散の体積積分，物質表示の式では物質座標Xでの発散の体積積分が現れる．それらを元の式に戻して整理すると，体積積分は積分範囲が任意に選んでも成立することから．それぞれの被積分項にある偏微分方程式（つり合い式）が成立せねばならないことが導かれる．

こうして， Cauchy応力で記述されるつり合い式と1st Piola-Kirchhoff応力で記述したつり合い式が得られる．これらは両方とも「現在配置における物体の内部のつり合い状態」を記述する等価な２つの式であることを認識しておくことが重要.



これで，基本的な力の変数と運動の変数についての説明は終わり．