

□

数学の道具(その5)

「連続体力学に特有の数学の道具」

- ・ ガウスの発散定理
- ・ 物質表示と空間表示
- ・ 物質時間微分
- ・ 輸送定理

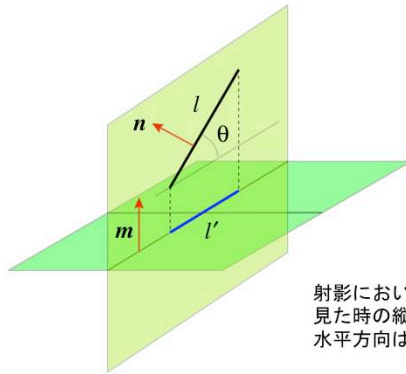
□

面の射影面積の公式（図的理解）

（１）線分の射影長さ（簡単！）

（射影長さ）

$$l' = l \cos \theta = l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})$$

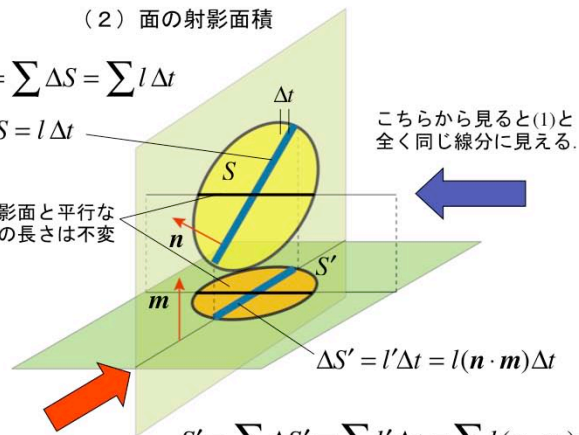


（２）面の射影面積

$$S = \sum \Delta S = \sum l \Delta t$$

$$\Delta S = l \Delta t$$

投影面と平行な線の長さは不変



こちらから見ると(1)と全く同じ線分に見える。

$$\Delta S' = l' \Delta t = l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) \Delta t$$

射影においては、こちらから見た時の縦方向の長さが縮む。水平方向は不変。

$$\begin{aligned} S' &= \sum \Delta S' = \sum l' \Delta t = \sum l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) \Delta t \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) \sum l \Delta t \\ &= S(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) \end{aligned} \quad \text{（射影面積）}$$

□

面の射影面積の公式

・線分の射影長さ

線分の射影長さは図の（１）に見るとおり、

（射影長さ）＝（元の長さ）×（「線分」と「投影面」の単位法線ベクトル同士の内積）

になることはみんな知っている。

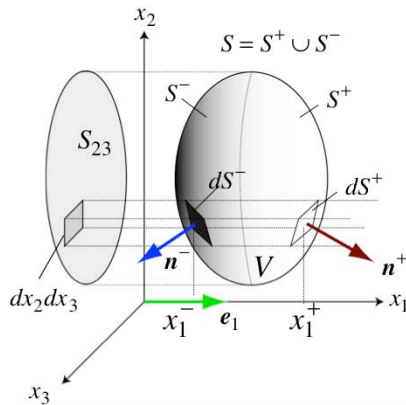
・面の射影面積

図のように浮かんでいる面を射影することを考える。浮かんでいる面内にあって投影面に平行な線分の長さは不変であり、その長さ不変の方向に直交する線分が（１）と同じルールで縮む。したがって、面を不変方向に垂直に無数の細い短冊に分割すれば、短冊の射影において幅は不変で長さが線分と同じ（１）のルールで縮んでいることになる。したがって、射影面積は

（射影面積）＝（元の面積）×（「面」と「投影面」の単位法線ベクトル同士の内積）

になることは容易に理解できる。

□ ガウスの発散定理（偏導関数の体積積分）



$$\text{積分 } \int_V \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1} dV \text{ を考える}$$

x_1 の偏導関数だから x_1 方向の積分を行う

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1} dV &= \iiint \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \iint_{S_{23}} [\Phi(x_1^+, x_2, x_3) - \Phi(x_1^-, x_2, x_3)] dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

ところが射影面積の公式を思い出すと・・・

$$dx_2 dx_3 = (\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_1) dS^+ = -(\mathbf{n}^- \cdot \mathbf{e}_1) dS^-$$

→ 内積 $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)$ が射影面積と正負の符号をウマイ具合に調整してくれる。ここがキーポイント！！

だから、内積 $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)$ を考えながら全表面にわたって機械的に積分すればよいことになる。

$$\begin{aligned} &= \iint_{S^+} \Phi(x_1^+, \dots) \mathbf{n}_1^+ dS^+ + \iint_{S^-} \Phi(x_1^-, \dots) \mathbf{n}_1^- dS^- \\ &= \int_S \Phi(x) \mathbf{n}_1 dS \end{aligned}$$

$$\therefore \int_V \frac{\partial[*]}{\partial x_k} dV = \int_S [*] n_k dS$$

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \Psi dV &= \int_V \nabla \cdot \Psi dV \\ &= \int_V \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_3} \right) dV \\ &= \int_S (\Psi_1 n_1 + \Psi_2 n_2 + \Psi_3 n_3) dS \\ &= \int_S \Psi \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

ガウスの発散定理 一偏導関数の体積積分一

・偏導関数の体積積分

ある関数（スカラー値、ベクトル値、テンソル値、ナンデモOK）の x_1 に関する偏導関数を体積 V にわたって積分することを考える。 x_1 に関する偏導関数だから、 x_1 について積分すると、ちょうど x_1 軸に沿って見た関数値の差 { (右側の面の値) - (左側の面の値) } を微小面積 $dx_2 dx_3$ の重みとして、それを射影面積 S_{23} にわたって足し合わせるという面積分になる。

・射影面積の公式の適用

ここで射影面積の公式の出番。射影した面積が $dx_2 dx_3$ になる領域境界面上の2つの微小表面 dS^+ , dS^- について、その外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}^+$, $\mathbf{n}^-$ と射影面の単位法線ベクトル $\mathbf{e}_1$ との内積を考えると、それがウマイ具合に正負の符号付きで射影面積 $dx_2 dx_3$ を与えてくれることに気付く。この辺りの図的イメージはとても大事。

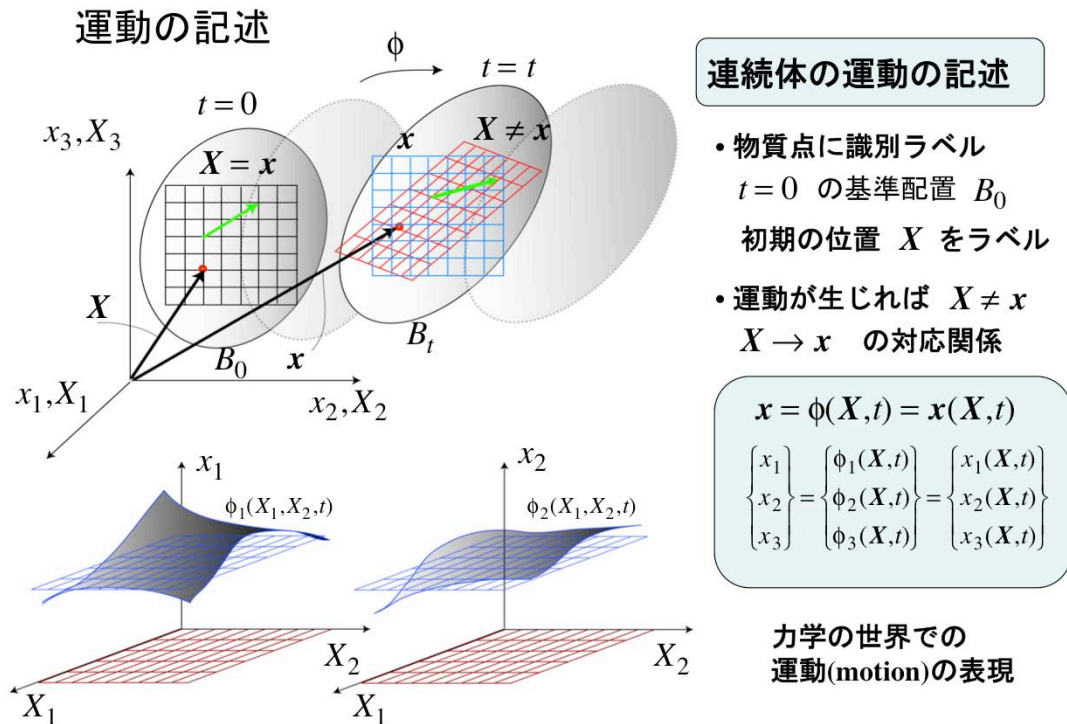
・（偏導関数の体積積分）＝（外向き法線ベクトルの成分を重み係数にした元の関数の面積分）

・・・というのが結論。右下の四角で囲んだ式のとおり。[*]の中はどんな関数（スカラー値、ベクトル値、テンソル値）でも良い。

・ガウスの発散定理

発散（divergence）というのは左側の上の四角にあるような微分演算のこと。ちなみに、図中はベクトル値関数の発散を考えている。それぞれの偏導関数の体積積分に対して、今しがた図的イメージと一緒に理解した右下四角の事実を適用すれば、ベクトル値関数と外向き法線ベクトルの内積を全表面にわたって積分すればよいという式を得る。この事実をガウスの発散定理と呼んでいる。しかし、本質はあくまでも右下四角で囲んだ式である。

□



□

運動の記述

・連続体の運動：変形しながら移動

連続体は物質点がぎっしりと詰まった状態で構成されている。連続体が運動するときには、それら物質点は隣との連結状態を保ちながら移動する。そして、連続体に変形するのは、各物質点の移動の仕方が少しずつ違うため・・・と理解できる。

・連続体の運動の記述

そのような連続体の運動を記述するには、各物質点の基準状態からの移動に注目するとわかりやすい。すなわち：

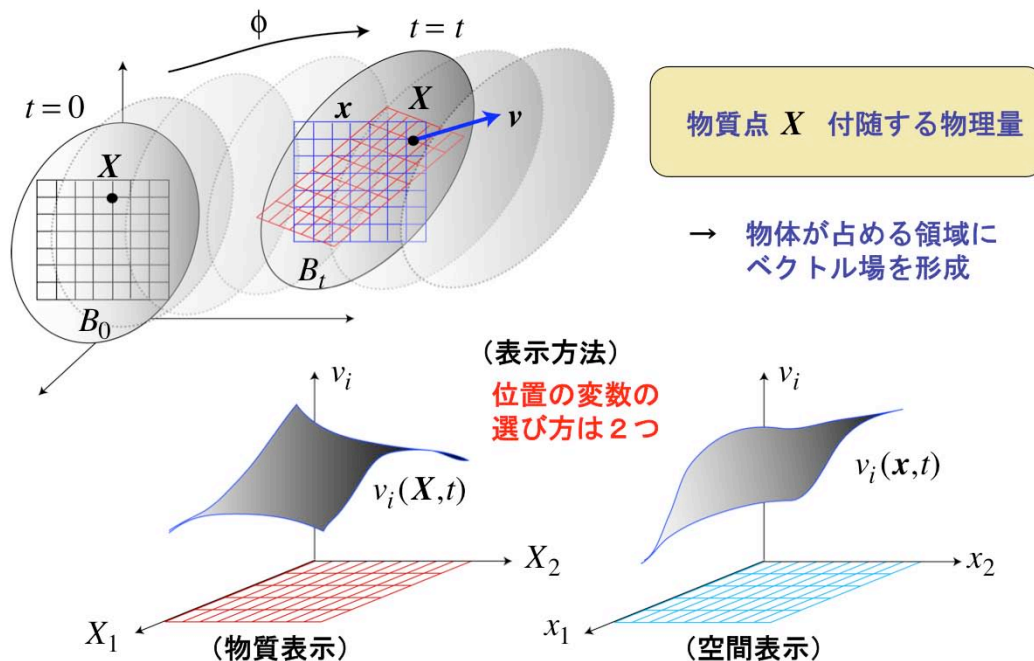
- (1) 時刻 $t=0$ での配置を基準配置として、物体を構成している物質点の全てに名前（ラベル）を付ける。名前には $t=0$ におけるその点の位置座標を用いる。大文字ベクトルの X で表す。
- (2) 運動に伴って各物質点の位置が時刻と共に変化する。その様子を、物質点 X と時刻 t を指定すると物質点の現在の位置ベクトル x が決まる関数として表す。

この元の位置ベクトル X と現在時刻の位置ベクトル x を対応させる関数により、変形しながら移動する物体の運動が完全に記述できる。このベクトル値関数を文字通り「運動」(motion)と呼ぶ。「運動」は、物体の基準配置を定義域とするベクトル値関数であり、ベクトル場を形成する。

このベクトル値関数では、現在時刻の位置ベクトル x の3つの各成分がその物質点のラベル X （基準配置における位置ベクトル）の関数となっている。図は2次元の場合のイメージである。現在時刻における位置ベクトル x の各成分は、基準配置座標の関数として図に示すような曲面（超曲面）になっているとイメージすればよい。

物理的には基準配置の座標軸 X は物体の変形に伴って曲がっている。しかし、関数の定義域として数学的に考える限りは、それが現実世界で変形していても関係ない。あくまでも基準配置で設定した直交座標（変形しない初めの状態）を考えればよいことに注意する。念のため。

関数の物質表示と空間表示



関数の物質表示と空間表示

・関数の物質表示と空間表示

物体の運動に関係して現れる物理量は全てが物質点に付随している。したがって、それらを $f(X, t)$ のように、まずは物質点 X と時刻 t の関数として表すのが直感的に理解しやすい。しかし、何も物理量を表す関数だからといって、位置を示す変数が必ず物質点 X でなければならない理由はない。物質点座標 X の代わりに物質点 X が占める空間の位置 x を用いて関数を表現してもいっように構わない。 X から x への変数変換には運動関数の逆関数を用いればよい。

物理量を表す関数を記述する際に、位置の変数として空間座標 x を用いるならば「ある時刻 t において物体が占める空間点 x に物理量が存在・分布している」というイメージになる。

位置の変数に物質点座標 X を用いた表現を「物質表示」、空間座標を用いた表現を「空間表示」という。場合に応じて使い分けられよい。

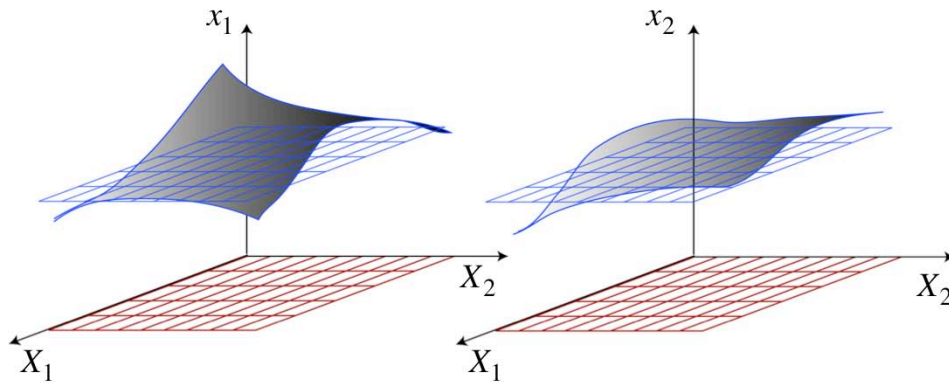
□

運動 (motion)

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1(\mathbf{X}, t) \\ \phi_2(\mathbf{X}, t) \\ \phi_3(\mathbf{X}, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1(\mathbf{X}, t) \\ x_2(\mathbf{X}, t) \\ x_3(\mathbf{X}, t) \end{Bmatrix}$$

物質点 $\mathbf{X}$ の現在の位置 $\mathbf{x}$
を $\mathbf{X}$ に付随する量として
物質表示したもの

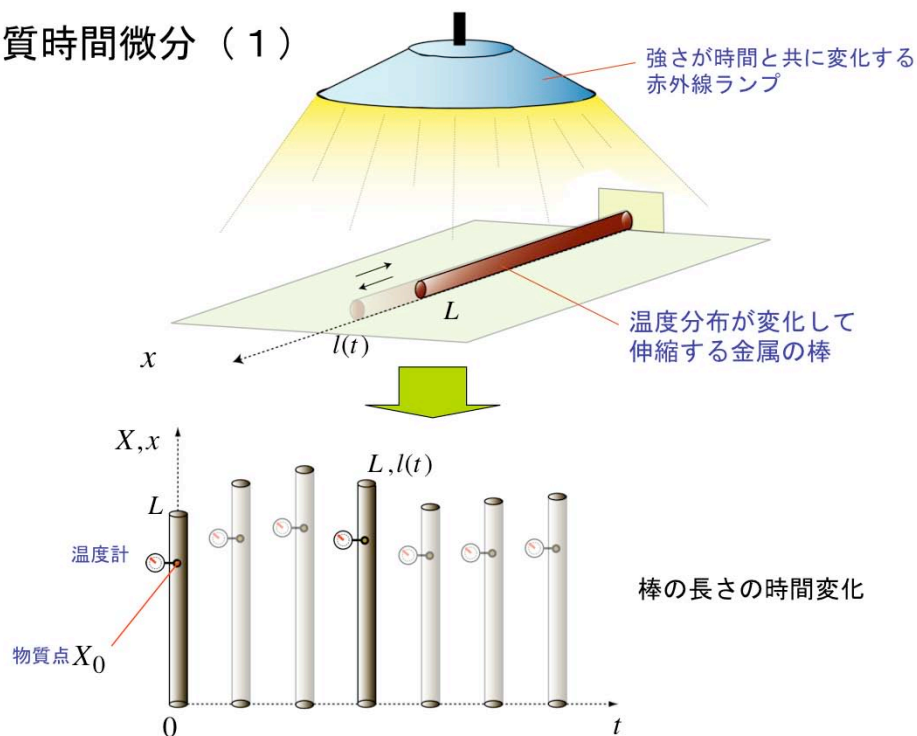


□

運動 (motion)

運動 (motion) は、物質点 $\mathbf{X}$ が時刻 t において占める空間の位置ベクトル $\mathbf{x}$ を、その物質点に付随する量として物質表示した関数のことである。

物質時間微分 (1)



物質時間微分 (1)

・伸縮する金属棒の温度分布の変化

赤外線ランプが当たっている金属の棒がある。ランプの光の強さはランダムにゆっくりと変化し、それにつれて棒内部の温度分布は時間の経過とともに複雑に変化する。その結果、棒全体も伸びたり縮んだりしているとしよう。時刻 $t=0$ での棒の長さは L 、伸縮しているときの時刻 t では $l(t)$ である。棒のある一点（物質点 X_0 ）には温度計がついている。

・伸縮する棒の内部の点の指定方法（その1）。「物質座標」

棒を構成する全ての物質点には、それぞれを識別するためのラベル X （時刻 $t=0$ における位置）が貼られている。したがって、棒内部の点を指定するのに、まずはこの X を用いて物質点そのものを指定する方法が思い浮かぶ。このように物質点に貼ったラベル全体を点を指定するために使うとき「物質座標」と呼ぶ。棒がいくら変形（伸び縮み）しようとも、物質点が消滅・生成したり、互いに入れ替わったりすることはない（起こらないとする）。したがって、物質座標で棒を見ている限り、常に、棒の根元は $X=0$ 、先端は $X=L$ であって、棒全体を表す X 範囲は $[0, L]$ のままである。すなわち、座標の範囲を「その座標で見たときの長さ」というならば、物質座標で見ている限りは棒の長さは不変である。図の物質点 X_0 に固定した温度計は、空間内での位置変化を気にしないで、物質座標を X_0 に固定して温度の時間変化を計測していることになる。こうした観測の方法をラグランジュの方法という。

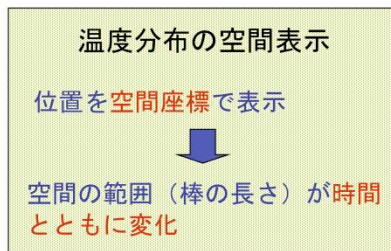
・伸縮する棒の内部の点の指定方法（その2）。「空間座標」

物質点にこだわらずに空間に固定された座標（空間座標） x の値で点を指定することもできる。すなわち「時刻 t に空間位置 x にある点」を指定するのである。空間座標 x で見るならば、棒の根元の座標は $x=0$ 、先端は $x=l(t)$ 、すなわち範囲は $[0, l(t)]$ であり、空間座標 x で見た棒の長さは時間とともに変化する。座標値 x を固定するならば、時間の経過と共にその位置をいくつもの物質点 X が通り過ぎることになる。したがって、空間座標を固定してその位置で温度を観測する（定点観測）するならば、「通り過ぎていく物質点とその位置に来たときの温度」を見ていることになる。この観測方法をオイラーの方法という。

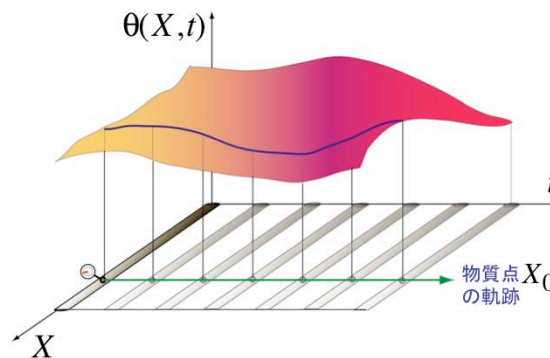
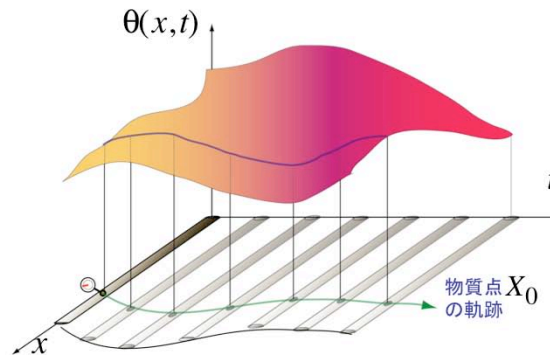
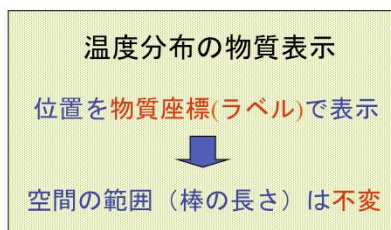
「棒が伸びたり縮んだりしている」と認識している我々自身は、空間に固定された座標（空間座標 x ）の立場から棒を見ていることに注意。

□

物質時間微分（２）



温度分布は位置と時間の関数



物質微分（２）

・ 温度分布の関数表示

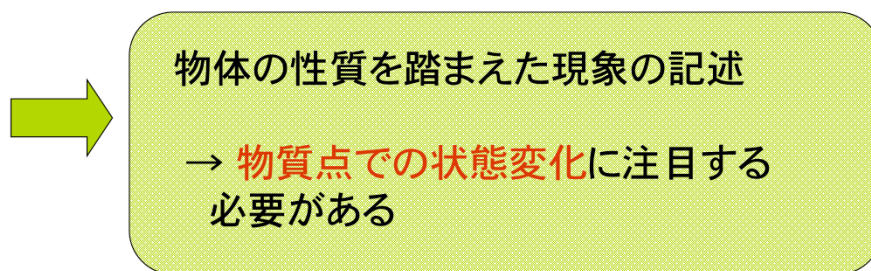
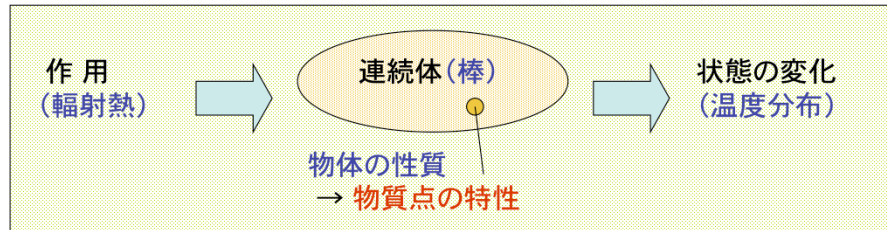
棒内部の温度分布は時間の経過とともに複雑に変化している．その温度分布を記述するには「位置〇〇の、時刻〇〇での温度が〇〇度である」と言えば良い．すなわち、温度分布は位置と時間の関数として表現される．その際、「位置」を示す変数（座標）に空間座標を用いるのが（関数の）空間表示、物質座標を用いるのが（関数の）物質表示である．空間表示のことをオイラー表示、物質表示をラグランジュ表示とも言う．

いま棒の長さは時間とともに変化している．したがって、空間に固定した座標で表せば当然のことながら時間とともに x の範囲は変わる．一方、物質表示では棒が伸縮しても物質点にくっついてラベルは変わらないので X の範囲は不変である．したがって、温度分布を示す関数曲面を図で示せば、空間表示では定義域が棒の伸縮を反映して変な形になる．一方、物質表示では定義域は長方形である．しかし、いずれの表示方法でも「位置」が混乱なく指定でき、温度分布を記述する関数が問題なく定義できる．

□

物質時間微分（３）

連続体に起こる「現象」



物質時間微分（３）

・連続体に起こる「現象」

連続体に何か作用があつて、その結果、連続体内部においてその性質に応じてある状態量が増加する。連続体力学においては、その「作用」と「状態量の変化」を時間と空間の関数として記述する。空間領域は形を変えながら運動する物体である。そして、その「作用」関数と「状態変化」関数を関係づける物体の応答の仕方（構成則）は、必然的に物質点に付随している性質として表現される。

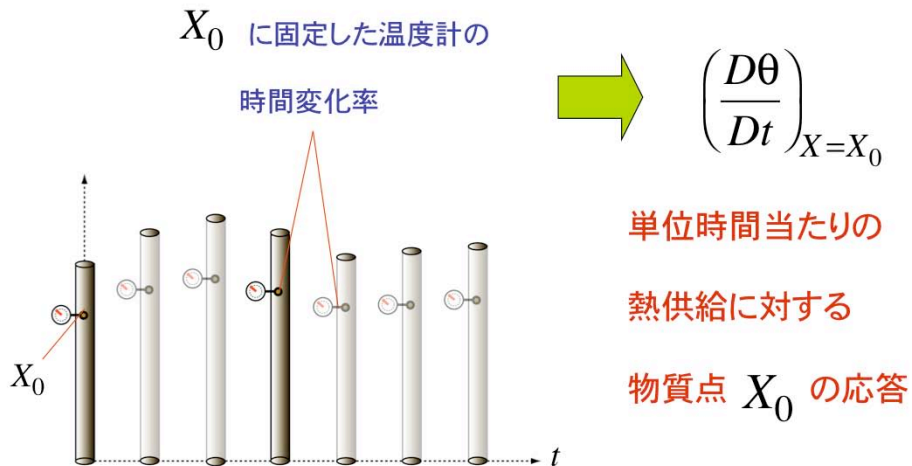
・物質点に注目

したがって、連続体を対象とした現象の記述では「物質点での状態変化」に注目せざるを得ない。すなわち、物質点を固定してそこで生起する状態変化を観察することで（ラグランジュの方法）何らかの法則が見えてくる。一方、空間座標を固定した定点において（オイラーの方法で）観測したときには、注目する点を通過する物質点が刻々と変化するので、物体の性質に基づいた変化の様子は直接的には解りにくい。

□

物質時間微分（４）

物質時間微分 $\frac{D\theta}{Dt}$: θ の物質点における時間変化率



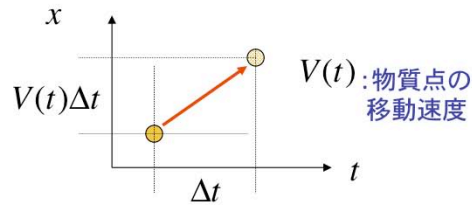
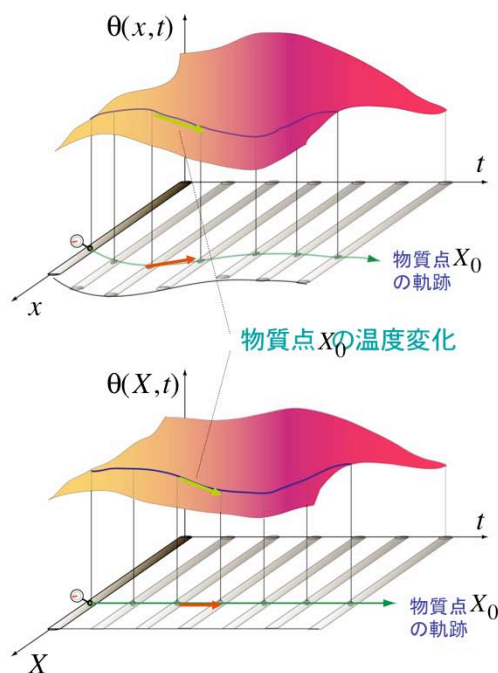
物質時間微分（４）

・物質時間微分とは

物質点を固定して観察したときの（物質点毎の）状態の時間変化率のことを物質時間微分という．先に述べたような物理的な要請から出てきた特殊な微分演算であり，数学のルールとしてあるのではない．操作としては物質点 X を固定しておいて関数の時間変化率を見ることになる．得られた物質時間微分の値はその物質点の何らかの応答（の仕方）を表していると解釈できる．

□

物質時間微分 結論



$$\begin{aligned}\frac{D\theta(x,t)}{Dt} &= \frac{D\theta(\phi(X,t),t)}{Dt} \\ &= \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial\phi(X,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} + V(t) \cdot \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\end{aligned}$$

$$\frac{D\theta(X,t)}{Dt} = \frac{\partial\theta(X,t)}{\partial t}$$

物質時間微分 結論

・空間表示された関数の物質時間微分

物質時間微分は物質点を固定した状態の時間変化率であるから、関数が空間表示されているときはちょっとした工夫がいる。物質点は図のように定義域（ x - t 平面）をある速度で移動している。その速度は物質点の運動における速度 $V(t)$ である。そのことを頭において物質時間微分の演算を考える。

まず、物質点 X を固定して考えるために、物質点 X が辿る空間座標 x は運動の関数（motion）によって $x=f(X,t)$ と与えられることを利用する。空間表示された温度関数 q の中の x を $f(X,t)$ と書き換える。そうしておいて、 X を固定して時間 t に関して微分する。見たとおり $f(X,t)$ は時間を含むから、微分の連鎖律を用いて箱の中のように演算が進められる。運動関数 $f(X,t)$ の X を固定した時間微分（ t による偏微分）こそは物質点 X の速度 $V(t)$ に他ならない。空間表示された関数に対しては、物質微分とは x - t 領域における $V(t)$ 方向への方向微分のようなものである。

・物質表示された関数の物質時間微分演算

関数が物質表示されていれば物質時間微分は簡単である。 X を固定した微分、すなわち時間 t による偏微分そのものである。

・あくまでも同じ時間変化率を見ていることに注意

両方とも物質点を固定して一緒にくっついて観測した時に見られる状態量の時間変化率である。見ている状態量の表し方（空間表示か物質表示か）に応じて欲しい量の引き出し方が違う（計算方法が違う）というだけの話である。

□

輸送定理（運動する物体上の積分量の物質時間微分）

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \theta(\mathbf{x}, t) dv$$

$$= \frac{D}{Dt} \int_{B_0} \hat{\theta}(\mathbf{X}, t) J dV \quad \dots(1)$$

$$= \int_{B_0} \left(\frac{D\hat{\theta}}{Dt} J + \hat{\theta} \frac{DJ}{Dt} \right) dV \quad \dots(2)$$

$$\because \frac{DJ}{Dt} = J \operatorname{div} \mathbf{v} \quad \dots(3)$$

$$= \int_{B_0} \left(\frac{D\hat{\theta}}{Dt} J + \hat{\theta} J \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV \quad \dots(4)$$

$$= \int_{B_0} \left(\frac{D\hat{\theta}}{Dt} + \hat{\theta} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) J dV \quad \dots(5)$$

$$= \int_{B_t} \left(\frac{D\theta}{Dt} + \theta \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv$$

輸送定理（その1）

・運動する物体上の積分量の物質時間微分

運動する物体上である物理量の積分が与えられているとして、その物質微分を考える必要があるとする。このような場面はしばしば起こる。

積分領域であるところの物体自体が時間変化するから、微分演算は積分の中に入れない。

そこで、

（1）積分変数を物質座標 $\mathbf{X}$ に変数変換して、積分領域を時間に依存しない基準配置にする。この変数変換に伴って物理量を示す関数は物質表示に変わり、積分測度である体積要素は $dv = J dV$ に変わる（学習済み）。

（2）すると、物質時間微分演算子は積分の中に入れる。 $J = \det \mathbf{F}$ も時間の関数であるから、積分の中は積の微分公式に従っている。

（3）これは公式。 $J = \det \mathbf{F}$ の物質時間微分は $J \operatorname{div} \mathbf{v}$ であることは良く使われる事実。ここに、 $\mathbf{v}$ は物質点の速度ベクトルである。証明はどの教科書にも出ているので一度確認のこと。

（4）公式を代入。

（5）すると、 J が共通因数なのでくり出すことが出来る

そして、再び $J \operatorname{div} \mathbf{v} dv$ なので、変数を元に戻すことができ、最後の式に到達する。

□

輸送定理（その2）

$$\int_{B_t} \left(\frac{D\theta(x,t)}{Dt} + \theta \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv$$

$$= \int_{B_t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \theta + \theta \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv \quad \dots(1)$$

$$= \int_{B_t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + \theta \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dv \quad \dots(1')$$

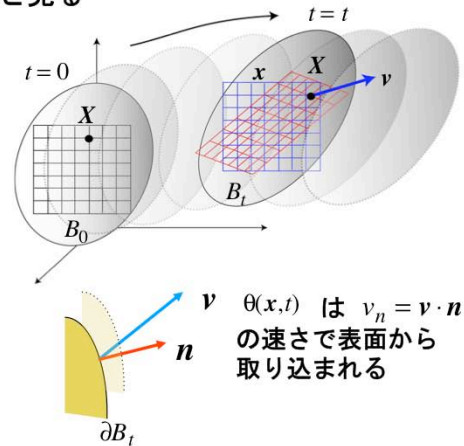
$$\because \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + \theta \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\theta \mathbf{v}) = \operatorname{div}(\theta \mathbf{v}) \quad \dots(2)$$

$$= \int_{B_t} \frac{\partial \theta}{\partial t} dv + \int_{B_t} \operatorname{div}(\theta \mathbf{v}) dv \quad \dots(3)$$

$$= \int_{B_t} \frac{\partial \theta}{\partial t} dv + \int_{\partial B_t} (\theta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds \quad \dots(4)$$

$$= \int_{B_t} \frac{\partial \theta}{\partial t} dv + \int_{\partial B_t} \theta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds$$

場 $\theta(x,t)$ の中を物体が移動すると見る



(物理量の時間変化の体積積分)
+
(物体の運動によって表面から流入する単位時間当たりの量)

輸送定理（その2）

・ さらに式変形を進めると次の結論に達する.

- (1) 空間表示された関数の物質時間微分を先に学んだ通りに展開する.
- (1') 見やすくするために grad , div などを書き換えただけ.
- (2) 積分の中の第2項と第3項は、積の微分を展開したものであることに気付く.
- (3) (2) を代入して積分を二つに分ける.
- (4) 二つ目の積分は発散定理が適用できて表面積分に置き換わる.

第2項の表面積分は、空間中に浮かぶ物理量（空間表示された関数値）の中を速度 $\mathbf{v}$ で移動するから、単位面積当たりの表面からは移動速度と外向き単位法線ベクトルとの内積に相当する量が流入することを示す.

したがって、「運動する物体上の積分値の物質微分は、空間表示された関数の時間偏導関数の積分と、物体の移動によって単位時間に表面から流入する量の和である」という結論を得る.

□

輸送定理の応用による重要な法則の表現

- ・質量保存則
- ・運動方程式
- ・エネルギー保存則（熱力学第 1 法則）

□

質量保存則の表現

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \rho_t(x, t) dv = 0$$

: 質量は不変



(輸送定理の応用)

$$\int_{B_t} \left(\frac{D\rho_t}{Dt} + \rho_t \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv = 0$$

$$\int_{B_t} \left(\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_t \mathbf{v}) \right) dv = 0$$



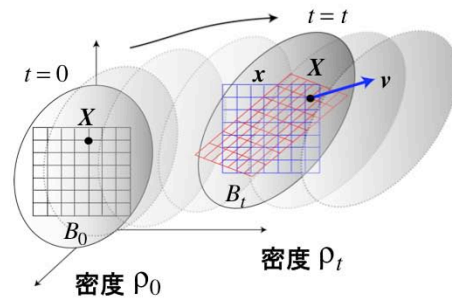
積分領域を任意部分に取っても成立!

$$\frac{D\rho_t}{Dt} + \rho_t \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

: 質量保存則 (の数式表現)

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_t \mathbf{v}) = 0$$

($\rho_t = \text{const.}$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$: 水の連続の式)



□

質量保存則の表現

- 「質量は生成消滅しない」ことの数式による記述

物体の質量の総和は変化しないのだから、密度を物体全体にわたって積分した総質量の物質時間微分はゼロである (密度は運動に伴って変化する)。

輸送定理を使うと中間の2つの式を得る。ところが、別に物体全体に注目しなくても、物体の任意部分についても質量は変化しないのだから、積分の中がゼロである。したがって、最後の2つの式を得る。これが質量保存則の数式表現である。ちなみに、非圧縮性材料の場合は $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ を得る。水を非圧縮として扱う水理学ではこれを連続の式と呼んでいる。

□

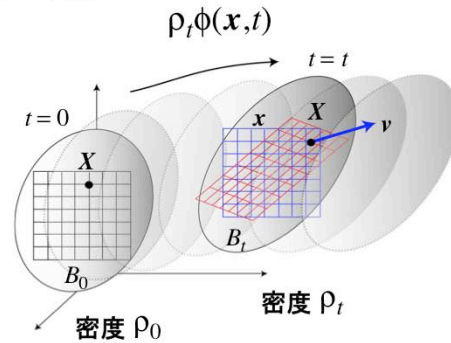
質量保存則の応用（有用な公式の導出）

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \rho_t \phi(x, t) dv \quad : \phi \text{ は単位質量当たりの量}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{B_t} \left(\frac{D(\rho_t \phi)}{Dt} + (\rho_t \phi) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv \\ &= \int_{B_t} \left(\frac{D\rho_t}{Dt} \phi + \rho_t \frac{D\phi}{Dt} + (\rho_t \phi) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv \\ &= \int_{B_t} \phi \left(\frac{D\rho_t}{Dt} + \rho_t \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv + \int_{B_t} \left(\rho_t \frac{D\phi}{Dt} \right) dv \\ &\quad \because \frac{D\rho_t}{Dt} + \rho_t \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{aligned}$$

$$= \int_{B_t} \rho_t \frac{D\phi}{Dt} dv$$

密度との積になっていると必ずこうなる！
（輸送定理）＋（質量保存則）の効能



□

質量保存則の応用による有用な公式の導出

・単位質量当たりの物理量が定義されている場合

単位質量当たりの物理量の総和の物質微分を考える．物理量が質量との積で与えられていると，輸送定理と質量保存則の帰結として，物質微分を注目する単位質量当たりの物理量だけに施せばよい，という公式を得る．この式は有用である．

最後の式のような形を見たら，質量保存則が既に用いられていると認識せねばならない．

□

運動方程式の導出（発散定理，輸送定理，質量保存則の応用）

運動量の時間変化は加えた力に等しい
(Newtonの運動法則)

$\rho_t v(x, t)$: 単位体積当たりの運動量

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \rho_t v_i dv = \int_{\partial B_t} t_i ds + \int_{B_t} \rho_t b_i dv$$

$$\because \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \rho_t v_i dv = \int_{B_t} \rho_t \frac{Dv_i}{Dt} dv$$

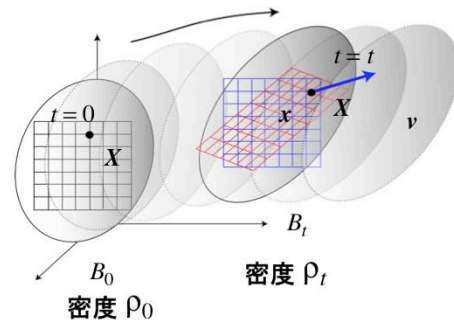
$$\because \int_{\partial B_t} t_i ds = \int_{\partial B_t} \sigma_{ij} n_j ds = \int_{B_t} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv$$

$$\int_{B_t} \left(\rho_t \frac{Dv_i}{Dt} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho_t b_i \right) dv = 0$$

$$\rho_t \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_t b_i \quad (\text{運動方程式})$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_t b_i = 0 \quad \left(\because \frac{Dv_i}{Dt} = 0 \right) \quad (\text{つり合い式})$$

加速度ゼロの時



□

運動方程式の導出

・ Newtonの運動法則：「物体の運動量の時間変化は加えた力に等しい」ことを，連続体の運動量を表す積分とその物質微分，重力の作用を表す体積積分と表面力の作用を表す表面積分を用いて数式で記述．

・ 左辺に先の公式を適用（輸送定理と質量保存則の応用）：速度ベクトルと密度の積だから，先に誘導した公式により，物質微分は速度ベクトルだけが受ける形にすればよい．

・ 右辺第2項にはCauchyの式と発散定理を適用：表面力はCauchyの式により，応力テンソルによる外向き単位法線ベクトルの変換として書ける．すると，発散定理が適用できて，応力テンソルの偏導関数の体積積分に書き直される．（つり合い式）

・ 運動方程式とつり合い式：体積積分がゼロの式にして，さらに物体全体でなく任意の部分についての積分でも成立することから，最後の運動方程式を得る．加速度がゼロの場合がつり合い式である．

□

熱力学の法則の数学表現（使う道具：その1）

（1）ガウスの発散定理

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} dV &= \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} dV = \int_V \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \right) dV \\ &= \int_S (\psi_1 n_1 + \psi_2 n_2 + \psi_3 n_3) dS \\ &= \int_S \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{n} dS\end{aligned}$$

（2）質量保存則からの公式

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \Phi dV = \int_V \rho \frac{D\Phi}{Dt} dV = \int_V \rho \dot{\Phi} dV$$

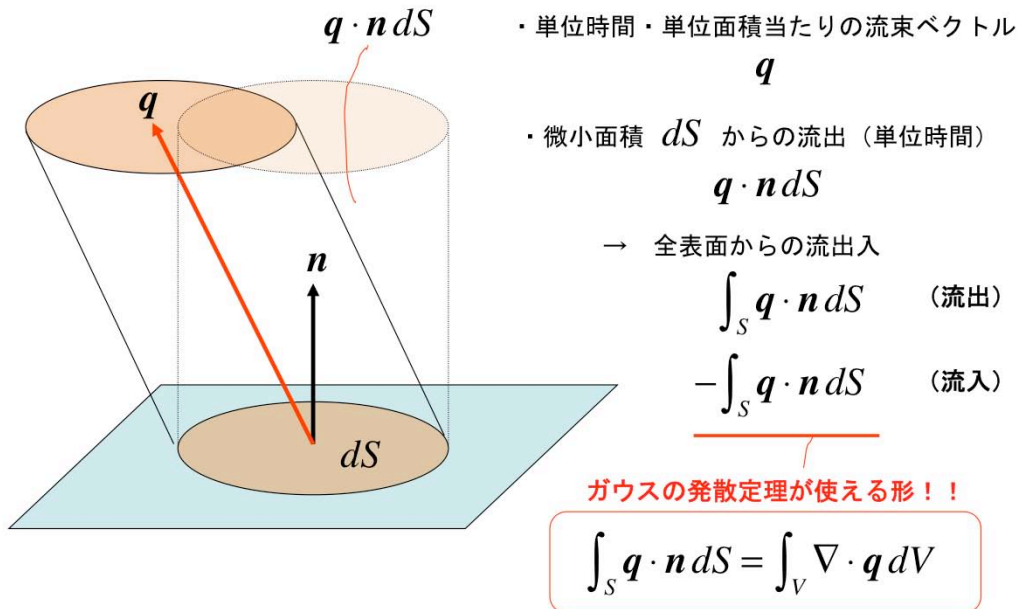
熱力学の法則の数学表現（使う道具：その1）

ガウスの発散定理と、質量保存則の帰結としての積分量の物質時間微分の公式を利用することにより、熱力学の方程式が誘導できる。

使うのはこの二つだけである。

□

(使う道具：その2)



熱力学の方程式の誘導 (全体から局所形へ) (使う道具：その2)

ある量が空間内を流れるように移動しているとき、単位時間あたりに単位面積を通過する量をベクトル量で表現して「流束ベクトル」と呼ぶ。熱力学では熱の移動を表す熱流束ベクトルが代表的。

流束ベクトルが $\mathbf{q}$ で表されているとすると、物体表面上の微小面要素 dS から単位時間あたりに流出する量は、微小面要素に立てた外向き単位法線ベクトルとの内積を用いて $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$ となる (図参照)。

したがって、考えている物体の全表面からの流出は表面積分で与えられる。流入を考えるのならば負号を付ければよい。

さて、物体表面からの全流出入は、「外向き単位法線ベクトルと流束ベクトルの内積の表面積分」として与えられるが、これはガウスの発散定理を適用してすぐに発散量の体積積分に変わること気付く。

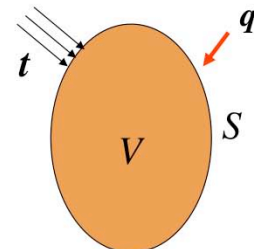
連続体に関する熱力学の基本方程式の誘導には、この種の式変形がお決まりのように現れる。

□

第1法則：エネルギー保存則

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(e + \frac{\|v\|^2}{2} \right) dV = \dot{W} + \dot{Q}$$

単位時間の仕事 (右辺第1項)
 熱流入 (右辺第2項)
 単位質量当たりの・・・ (左辺)
 運動エネルギー (左辺第2項)
 内部エネルギー (左辺第1項)



内部エネルギー＋運動エネルギーの時間変化 = 外界から受け取る仕事と熱の和

$$\dot{W} = \int_V \rho f \cdot v dV + \int_S t \cdot v dS = \int_V \rho f \cdot v dV + \int_S \sigma n \cdot v dS$$

体積力の仕事率 (第1項)
 表面力の仕事率 (第2項)
 Cauchyの式 $t = \sigma n$ (第2項)
 $\dot{Q} = \int_V \rho h dV - \int_S q \cdot n dS$
 熱の湧き出し (第1項)
 表面からの熱流入 (第2項)

熱力学の方程式の誘導（全体から局所形へ）（第1法則：エネルギー保存則）

単位質量当たりの内部エネルギーや運動エネルギーを定義すると、エネルギーの物体全体についての総量は積分で与えられる。

エネルギー保存則はその積分量の時間変化（当然のことながら物質時間微分の意味）が物体が外界から受け取る仕事率（単位時間の仕事）と単位時間あたりの熱流入に等しいこと主張する。そのことを積分を使ってきじゅつすればこのようになる。

積分や微分の式を万国共通の言葉として理解すべきところ。

□

第1法則：エネルギー保存則（続き）

体積積分に書き換える

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(e + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} \right) dV = \int_V \rho (\dot{e} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) dV \quad (\text{質量保存則からの公式})$$

$$\dot{Q} = \int_V \rho h dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho h dV - \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV \quad (\text{ガウスの発散定理})$$

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS \\ &= \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) dV \\ &= \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{v}) dV \quad (\text{部分積分}) \text{ と } (\text{ガウスの発散定理}) \\ &= \int_V (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho \dot{e} = (-\rho \dot{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \rho h - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

運動方程式

$$\therefore \rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \rho h - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

第1法則：エネルギー保存則（続き）

左辺の積分量の物質時間微分は公式通りに、微分が積分の中に入って密度の隣の量だけの時間微分になる。

熱流入については、表面からの流入にガウスの発散定理が適用できて発散の体積積分に変わる。

仕事については、表面力の成す仕事率にCauchyの式を適用し、部分積分とガウスの発散定理を組み合わせることで体積積分に書き換えられる。

全てが同じ体積積分の式で表現できれば、体積領域を任意に取っても式が成立せねばならないことから、局所形を得る。

さらに、左辺の加速度項と併せて運動方程式が成立するので、結局、応力とひずみ速度がなす仕事率が残る。