

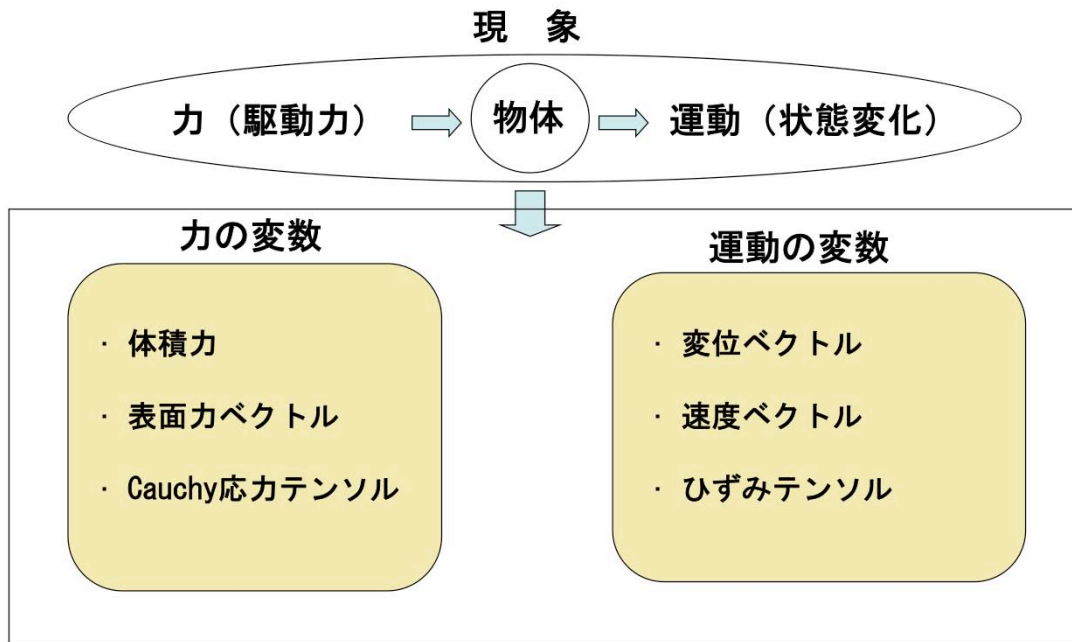
□

連続体力学(その5)

- ・ 静的可応力と運動学的可変位
- ・ 構成則の役割
- ・ 境界値問題の構成

□

連続体の力のつり合いと変形を扱う運動の変数と力の変数



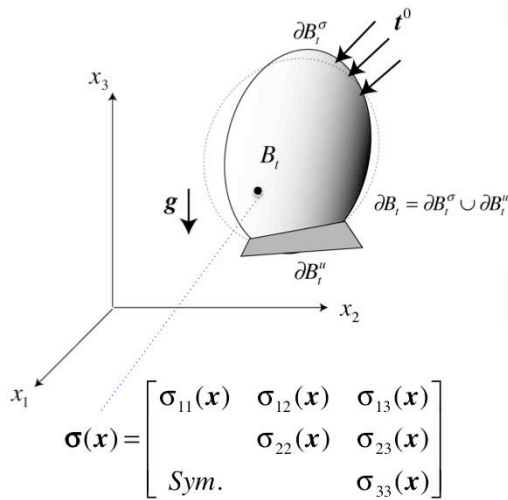
□

連続体の力のつり合いと変形を扱う運動の変数と力の変数

連続体の力のつり合いと変形の問題を扱う力学モデルでは、「運動の変数」は変形を記述する変位あるいは速度ベクトルであり、それらベクトル場の勾配で定義される種々のテンソルである。そして、それを引き起こす原因としての「力の変数」は、重力など物体のかさ（嵩）に比例する遠隔作用力である体積力ベクトル、物体に接触することで面積に比例して作用する表面力ベクトル、そして、Cauchyの応力テンソルである（後述する種々の応力テンソルは全てCauchyの応力テンソルからの派生である）。

□

静的可容応力（場）



$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \quad \text{in } B_t \quad (\text{つり合い式})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho g_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho g_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho g_3 = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^0 \quad \text{on } \partial B_t^\sigma \quad (\text{荷重境界条件})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{Sym.} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^0 \\ t_2^0 \\ t_3^0 \end{bmatrix}$$

Cauchy応力 → テンソル場(6成分)
→ 6つのスカラー関数

・ つり合い式と荷重境界条件を満たす
Cauchy応力場 → 静的可容応力（場）

・ 6つの関数に式は3つ → 無限通り存在！

静的可容応力（場）

・ Cauchy応力テンソル場

表面荷重と重力の作用のもとで変形し、静止している物体内部の1点の力の状態はCauchy応力テンソルで表される。それは位置 x によって変化し、Cauchy応力テンソルは物体を定義域とするテンソル値関数（テンソル場）となる。

・ 静的可容応力場

力がつり合って静止している連続体中に分布するCauchy応力テンソルは対称テンソルであり、かつ、つり合い式と荷重境界条件を満足せねばならない。連続体を定義域として、つり合い式と荷重境界条件を満たす対称テンソル値関数を「静的可容応力」あるいは「静的可容応力場」という。

・ 静的可容応力場は無限通り存在

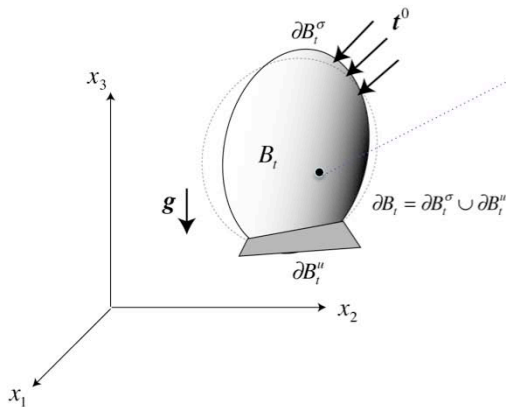
Cauchyの応力テンソルは対称テンソルだから独立な6つの成分を持つ。それら6つの成分が連続体においてスカラー場を形成しているのだが、それら6つの成分が満たさねばならないつり合い式は3つの偏微分方程式である。3つの方程式を満たす6つの未知関数を求める問題の解は「不定」、すなわち、無限通り存在する。

滑らかな6つのスカラー場を勝手に考えて、それらを成分とする対称なテンソル場を作るならば、そんな作り方は無限通り存在することは容易に理解できる。そんなテンソル場のうち、つり合い式と境界条件を満たすものを「静的可容応力場」というのである。それは無限通り存在するが、勝手に作った無限通りのテンソル場ほど多くはない。

「可容応力」の意味は、つり合い式と荷重境界条件を満たしているのだから、「対象とする連続体の力のつり合いを記述する応力場として考えても良い。解の候補である」という意味である。

□

運動学的可容変位（場）

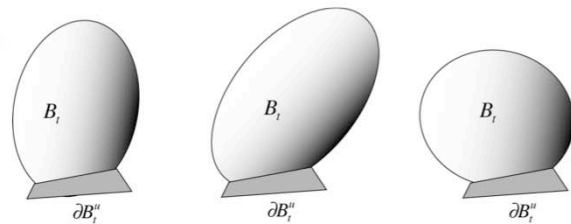


$$u(x) = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{in } B_t$$

滑らかなベクトル場（微分可能）
 → 変形してちぎれない
 → 変形して折り重ならない

$$u(x) = u^0 \quad \text{on } \partial B_t^\sigma \quad (\text{変位境界条件})$$

- 種々のひずみが定義できる程度に滑らかで変位の境界条件を満たす
 → 運動学的可容変位（場）
 → 無限通り存在！



運動学的可容変位（場）

変位ベクトル場

連続体の変形に伴う物質点の変位を表す変位ベクトルは、連続体を定義域とするベクトル値関数（ベクトル場）を形成する。

運動学的可容変位場

対象とする連続体を定義域とするベクトル場のうち、変位の境界条件を満たし、かつ種々のひずみが定義できる程度に各成分が滑らかな（連続微分可能）関数（スカラー値関数）なベクトル場を「運動学的可容変位」あるいは「運動学的可容変位場」という。種々のひずみが定義できる程度に滑らかな変位ベクトル場は、連続体がちぎれたり、部分が重なったりしないことを保証する。

運動学的可容変位場は無限通り存在

対象とする連続体について、境界条件を満たし、かつ、ちぎれたり部分が重なったりしない変形は図に見るとおり無限に考えることができる。すなわち、変位ベクトル場は独立な3つの成分を持つが、変位境界条件を満たし、ひずみテンソルが定義できる程度に連続微分可能なスカラー値関数を勝手に選んでそれら3つの成分とすれば、考える連続体の変位ベクトル場のとなり得ることは容易に理解出来る。

滑らかな3つのスカラー場を勝手に考えて、それらを成分とするベクトル場を作るとすれば、それら無限通り存在することは容易に理解できる。そんなベクトル場のうち、変位境界条件を満たすものを「運動学的可容変位場」というのである。

「可容変位」の意味は、ひずみが定義できる程度に滑らかで、かつ、変位の境界条件を満たしているのだから、「対象とする連続体の変形を記述するベクトル場として考えても良い。解の候補である」という意味である。

□

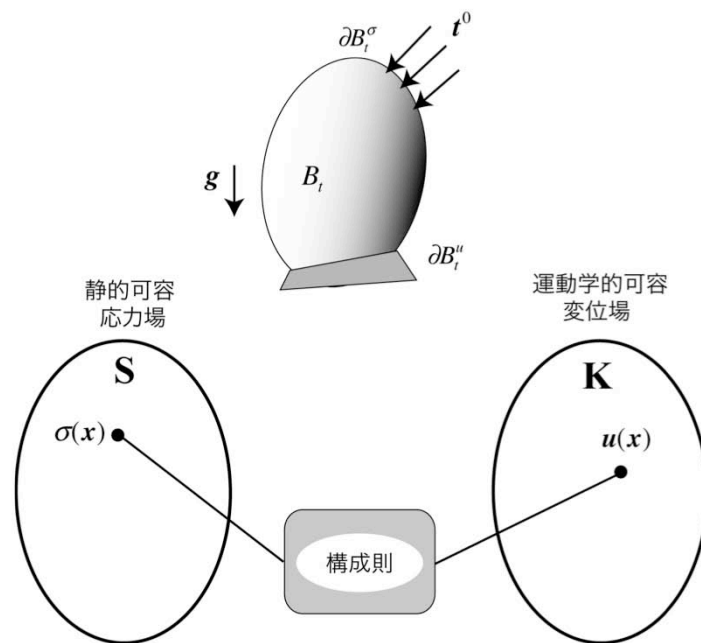
構成則の役割

- ・ 無限通り存在する
静的可容応力場
- ・ 無限通り存在する
運動学的可容変位場



構成則を満たす
組み合わせが正解

答えは物体に聞け！



構成則の役割

・ 変位ベクトル場

無限通りある応力場の候補（静的可容応力）と，同じく無限通りある変位場の候補（運動学的可容変位）の中から，物体の性質を表す構成則を満たす一組の組み合わせを選ぶと，それが正解の応力場と変位場となる．

問題の数学的な条件を満たして無限通り存在する応力テンソル場と変位ベクトル場から，物体の物理的性質を反映した構成則を用いて正解の組み合わせを探すのである．構成則にはそんな役目がある．最後は物体に聞け，ということ．

□

境界値問題の構成：（例）線形弾性体の力のつり合いと変形の問題

（つり合い式と荷重境界条件）

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \quad \text{in } B_t$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^0 \quad \text{on } \partial B_t^\sigma$$

未知数：6（ σ_{ij} ）
式の数：3

（変位ひずみ関係式と変位境界条件）

$$u_i = u_i^0 \quad \text{on } \partial B_t^u$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{微小ひずみ})$$

未知数：3 + 6（ u_i , ε_{ij} ）
式の数：6

未知関数15に対して式の数9 → 解は不定

（構成式）

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{線形弾性体}) \quad \text{式の数}は6$$

未知関数15に対して式の数15 → 問題が解ける！

境界値問題の構成

・静的可容応力場と運動学的可容変位場の変数の数と式の数

力の変数は応力，運動の変数はひずみと変位である．質量保存則，運動法則から，応力はつり合い力と荷重境界条件を満たす静的可容応力でなければならない．変数は対称な応力テンソルの独立な6個の成分であり，それが満たすべき式はつり合い式の3本である．

また，連続体がちぎれたり，部分が重なったりしないような変形は，変位境界条件をみたす滑らかな運動学的変位ベクトル場で与えられる．変数は変位ベクトルの成分3つと，その勾配の対称部分によって与えられる微小ひずみテンソルの6成分，合計9個であり，式はひずみを与える変位ひずみ関係式の6本である．

この時点では，未知変数の合計15に対して式の合計が9本で，式の数足りない連立方程式系であり解は不定で定まらない．すなわち，問題は解けない．

・構成則の役割

ここで，構成則の登場．材料の性質を記述する構成則は応力とひずみを結びつける6本の式として与えられる．すると，式の数未知変数の数と同じ15になって，連立方程式の解が定まることになる．すなわち，問題が解ける．

□

二階偏微分方程式（楕円型）の境界値問題としての定式化

（つり合い式）＋（構成則）＋（ひずみ変位関係式）＝（変位の二階微分方程式）

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (E_{ijkl} \epsilon_{kl}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(E_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x_i} \left(E_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + \rho g_i = 0 \quad \text{in } B_t$$

二階微分方程式の境界条件

（１）未知関数そのもの → 変位境界条件

$$\therefore u_i = u_i^0 \quad \text{on } \partial B_t^u$$

（２）未知関数の１階導関数 → 荷重境界条件

$$t_i^0 = \sigma_{ij} n_j = (E_{ijkl} \epsilon_{kl}) n_j = \left(E_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) n_j$$

$$\therefore \sigma_{ij} n_j = t_i^0 \quad \text{on } \partial B_t^\sigma$$

二階の微分方程式（楕円型）の境界値問題としての定式化

・つり合い式に構成則を入れ、さらに変位ひずみ関係式を代入すると、変位に関する二階の微分方程式を得る．なお、ここでは E_{ijkl} が必ずしも定数ではないとしている．

・二階の微分方程式に与える境界条件には、未知関数それ自体の値を与える条件と、未知関数の１階導関数の値を与える条件の二種類あることは数学で習ったとおり．それが力学の問題では変位境界条件が未知関数そのものを与えている境界、そして、荷重境界が構成則を通して１階導関数の値を与える境界になっている．力学と数学の調和を見ることが出来る．

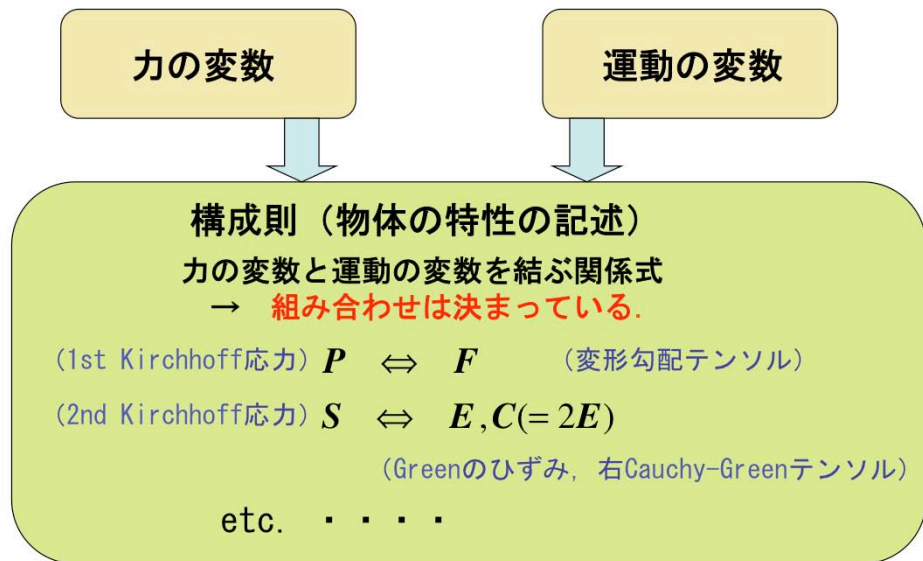
・扱うのが大変形であれば、ひずみは有限ひずみを用いる必要がある．有限ひずみは既に学んだ通り導関数の２乗を含んだ非線形量である．そして、その有限ひずみに対応した応力との関係を与える構成則が必要になる．それは非線形なものであろう．こうして、扱う材料が途端にヤヤコシイものになる．

解かねばならないつり合い式は同じである．しかし、Cauchy応力を変数にしたままでは構成則で使っている応力とミスマッチがおこるので、つり合い式を P i o l a - K i r c h h o f f 応力など、整合性の取れた形に書き直す．それを解くのであるが、変形に伴って連続体の形が大きく変わるのでますますヤヤコシクなる．

非線形問題は「ヤヤコシイの３乗」ぐらいだと思って居ただけでよい．しかし、力学問題としての本質的な構造は以上に学んだ通りスッキリとしたものである．そして、変形を記述するひずみが内包する非線形性、材料が示す非線形性、解くべく方程式の対象（物体の形）が変化すること等、ヤヤコシサがどこに起因するかだけをしっかりと理解出来れば「掴みは充分過ぎるほどにオッケー！」である．

□

構成則について



構成則について

・力の変数と運動の変数の組み合わせ

構成則は、物体の特性に応じて力の変数と運動の変数がどのような関係になるかを記述する式であることは最初に述べた。その際、組み合わせられる力の変数と運動の組み合わせは、内積が物体内部での仕事として意味を持つものでなければならない。すなわち、先に見たように、内積がCauchy応力と変形速度テンソルの内積に等しくなるような組み合わせと決まっている。

・基準配置で考えるから . . .

しかも、実験等によって物性値を決めるのであれば、基準配置（変形前の形）において考えることのできる変数がよい。だから、第1および第2 Piola-Kirchhoff応力と、変形勾配テンソル、Greenのひずみテンソルあるいは同じ意味であるが右Cauchy-Greenテンソルなどが用いられる。

□

構成則が満たさねばならない大事なこと

→

客観性の原理

- ・物体の特性は、観測者が異なっても同じ特性として認識されなければならない。

→ 元の変形と剛体運動分だけ異なる変形に対応する応力は、元の変形に対応する応力を剛体回転させたものに等しい。

ような構成則でなければならない。

構成則が満たさねばならないこと

・客観性の原理

客観性の原理とは、互いに剛体運動する2つの観測者によって物理的な事実が異なって見えることはない、という当たり前のことと理解できる。

それを構成則に適用すれば、物体の性質は物理的に客観性のある事実だから、剛体運動している観測者によってその特性が異なって見えることがあってはならない。観測者が静止していて剛体運動する物体を観測するとしてもよい。そして応力はひずみと対応しているのであって、剛体運動には無関係だから「元の変形と剛体運動分だけ異なる変形に対応する応力は、元の変形に対応する応力を剛体回転させたものに等しい」となる。

□

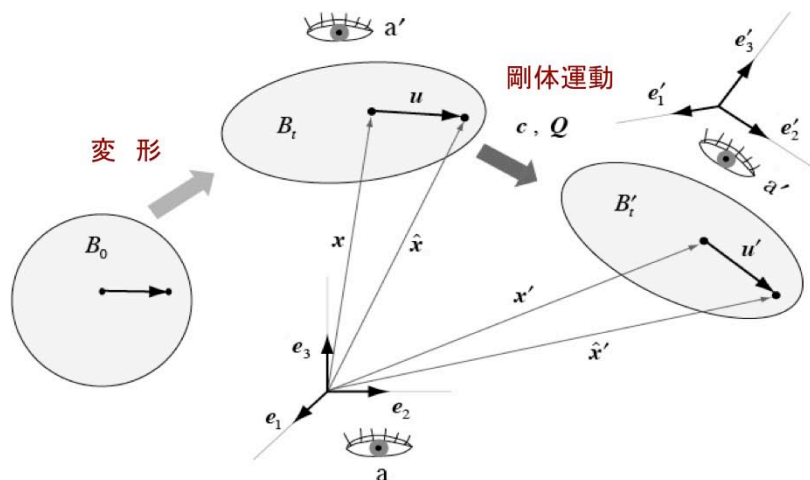
連続体力学(その6)

- ・ 客観性の原理
- ・ 客観性のある応力速度

□

客観性の原理

物理的事実は連続体の並進・回転運動によって変わらない。



→ 物体と一緒に剛体運動する観測者から見れば物理的事実は不変

B_t で観察されたベクトル u は、剛体回転によって観測者 a から見て u' になる。
しかし、ベクトル u は、物体と一緒に剛体運動する観測者 a' から見れば不変。

→ そのような量には客観性があるという。

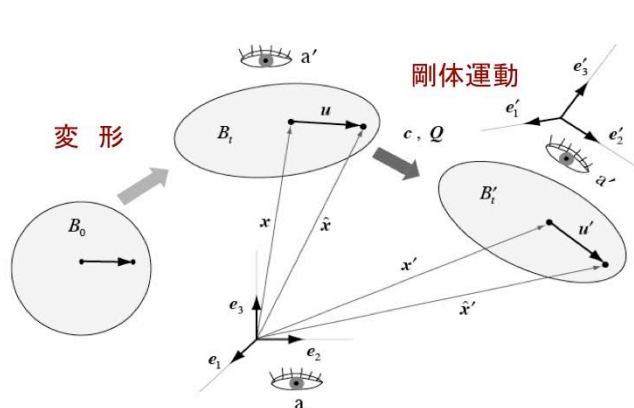
客観性の原理

・物理的事実は止まっている観測者から見ても、剛体運動する観測者から見ても同じである。この当たり前のことを客観性の原理という。連続体の運動にこのことを当てはまれば、観測者が剛体運動することと物体が剛体運動することは相対的なことから、言い換えて「変形後にさらに剛体運動を重ねても、物理的事実は変わらない」と言うことになる。

・変形後に観測されたベクトル u は、さらに剛体運動（並進、回転）を重ねても物体に依存した物理量として変化しない。それは止まっている観測者 a からみれば u' に変化して見えるが、物体と一緒に剛体運動する観測者 a' から見れば不変である。このような量のことを客観性のある量という。

□

客観性のある量



物体と一緒に剛体運動する
観測者 a' から見れば不変.

剛体運動 (並進と回転)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{x}$$

並進 回転

$$(\because \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T)$$

$$\text{客観性のある量} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha' = \alpha & \text{: スカラー} \\ \mathbf{u}' = \mathbf{Q}\mathbf{u} & \text{: ベクトル} \\ \mathbf{H}' = \mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q}^T & \text{: 二階テンソル} \end{array} \right.$$

客観性のある量

・ 物体と一緒に剛体運動する観測者 a' から見れば不変であるような量のことを客観性のある量という. しかし, 我々は観測者 a の立場にある. したがって, 剛体回転によって $\mathbf{u}'$ に変化する $\mathbf{u}$ に客観性があるかどうかの判定法が必要.

・ 物体の剛体回転 $\mathbf{Q}$ に対して上の式を満足するような変化をする量であれば, 物体と一緒に剛体運動する観測者 a' から見て不変になる. すなわち, 客観性がある量である.

□

変形勾配テンソルの客観性

$$F = \frac{\partial x}{\partial X}$$

$$F' = \frac{\partial x'}{\partial X} = \frac{\partial (c + Qx)}{\partial X}$$

$$= Q \frac{\partial x}{\partial X}$$

$$= QF$$

変形勾配テンソルの客観性

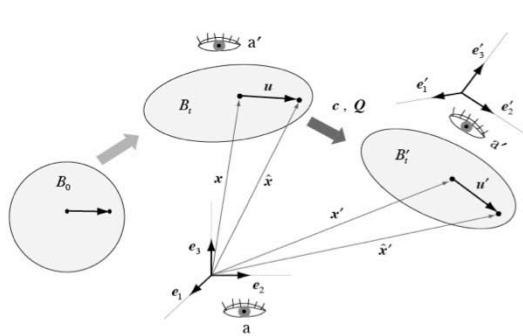
変形勾配テンソル F は二階テンソルであるが、変形後に物体に剛体回転 Q を与えた際には $F' = QF$ となる。 F はツーポイントテンソルなので、このようにベクトルと同じ変化をすることがその客観性を保証する。

□

構成則の客観性

力と変形の関係は物体の性質だから観測者に依らず不変.

$$\sigma = \Phi(F)$$



$$\sigma' = \Phi(F') \quad \text{: 同じ式}$$

$$\sigma' = Q\sigma Q^T, \quad F' = QF$$

$$\begin{aligned} Q\sigma Q^T &= \Phi(QF) \\ &= Q\Phi(F)Q^T \end{aligned}$$

構成則の客観性の条件

力の変数と運動学的変数には客観性のある量を採用

構成則の客観性

・力と変形の関係は物体に固有の性質である. それは観測者の運動状態によらず不変である. したがって, それを記述する構成則も観測者に依らず不変でなければならない. すなわち, 構成則には客観性がなければならない.

・物体と一緒に剛体運動する観測者 a' から見て, 構成則は全く変わらない. そのような構成則であるために, 観測者 a にとってどのように変化せねばならないか, という条件が構成則の客観性の条件式である.

・もちろん, 構成則に現れる力の変数と運動学的変数は客観性のある量でなければならないことは当然である.

□

構成則の例

・超弾性 (hyperelasticity)

(一般形)

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \Leftrightarrow \Psi(\mathbf{F}) = \int_0^{\mathbf{F}} \mathbf{P}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{F}$$

(客観性の原理を適用)

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \Leftrightarrow \Psi(\mathbf{E}) = \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{S}(\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{E}$$

構成則の例

どの教科書にも出ている超弾性体を挙げる.

・超弾性 (hyperelasticity)

変形勾配テンソル $\mathbf{F}$ のポテンシャル関数があつて, それを $\mathbf{F}$ で偏微分すると対応する第1 Piola-Kirchhoff応力になる. 構成則が図中の式のように書かれるとき, そんな性質を超弾性という.

・客観性の原理の適用による書き換え

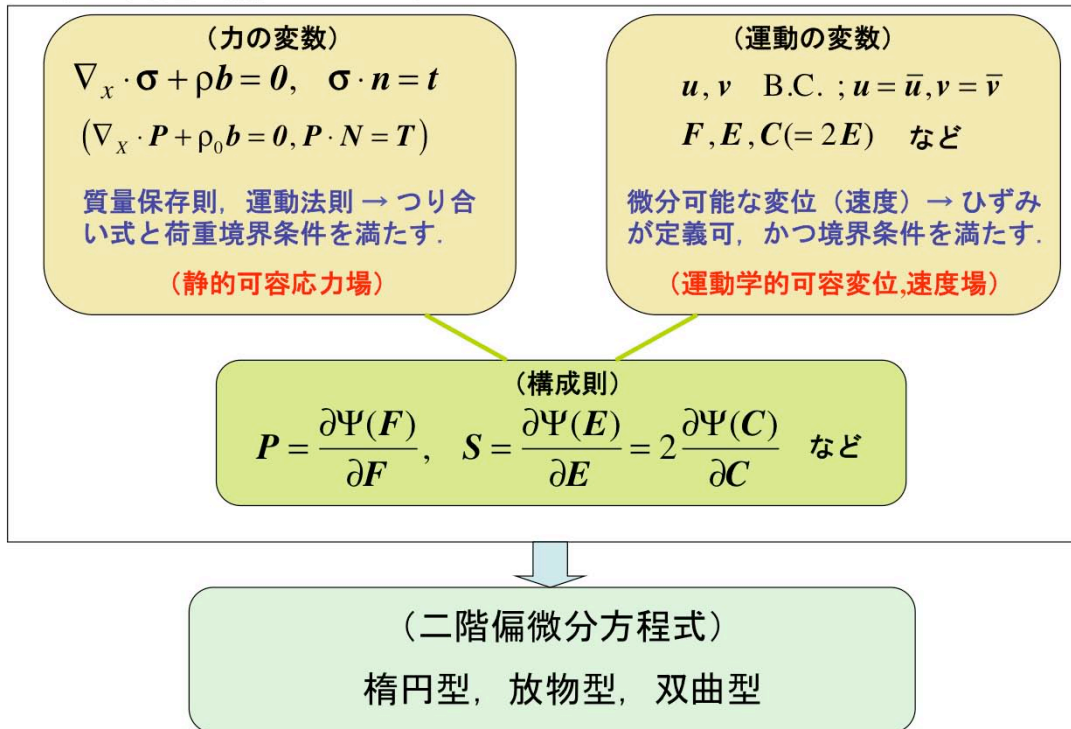
そんな超弾性構成式が「客観性を満たさなくてはならないから・・・」と考えていくと, $\mathbf{F}$ の中の剛体回転分 $\mathbf{R}$ (* $\mathbf{F}$ の極分解を参照) には無関係であることが示され, 結局はGreenのひずみと第2 Piola-Kirchhoff応力の関係に落ち着く. この辺の話は客観性の原理を数学的に扱うことが必要で少々ややこしい. しかし, どんな教科書にも必ず出ている基本的な事実である.

・ポテンシャル関数(場)の存在

ちなみに, 右の積分の意味は「積分と等しくなる $\mathbf{F}$ (または $\mathbf{E}$) の関数が存在すること」をいう. すなわち, 経路に依存せず最終の $\mathbf{F}$ (または $\mathbf{E}$) で決まる関数 (スカラー場) の存在を要請しているのであって, 応力 $\mathbf{P}$ や $\mathbf{S}$ を変形指標 $\mathbf{F}$ や $\mathbf{E}$ の関数として「ナンデモカンデモ積分してしまえ・・・」というのとはぜんぜん意味が違うので注意. 念のため.

□

力学の問題（解くべき式）



力学の問題（解くべき式）は2階偏微分方程式の初期値境界値問題になる

・力の変数である応力はつり合い式と荷重境界条件を満たさねばならない。つり合い式の誘導（運動方程式の誘導）に見るとおり、それは質量保存則、運動法則からの帰結である。つり合い式と荷重境界条件を満足する応力場を静的可容応力場という。一つの問題について静的可容応力場は無限通り存在する。

一方、運動の変数である変位や速度は変形に関する境界条件を満たさねばならない。また、微分可能であって、ひずみあるいはひずみ速度が定義できなければならない。そのような変位場（速度場）を運動学的可容変位場・速度場という。運動学的に可容であるために変位（速度）が満たすべき条件のことを「変位（速度）の適合条件」ともいう。一つの問題について、運動学的可容変位場・速度場も無限通り存在する。

そして、物体の性質を反映した構成則を与えることによりそれらは結びつけられて偏微分方程式の初期値・境界値問題として問題が記述される。

それを解くと、一つの問題について、無限通りある中から、構成則を通して対応する一組の静的可容応力場、運動学的可容変位場（速度場）が、問題の解として選ばれるのである。

・変形の問題は楕円型の微分方程式に適切な境界条件（変位、表面荷重）を与えて解く問題になる。それは有限変形を扱う限りは幾何学的な非線形性を伴うので、結果として非線形な方程式になる。それに加えて材料の構成則が非線形（材料非線形という）ならば尚更である。そんな方程式は計算機による数値解法によって解くしかない。

□

変形の速さに関する量の客観性 (その1)

・速度ベクトルには客観性がない

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = \dot{\mathbf{x}}' &= \frac{d}{dt}(\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{v} \\ &\neq \mathbf{Q}\mathbf{v} \end{aligned}$$

・速度勾配テンソルにも客観性がない

$$\begin{aligned} \mathbf{l}' &= \dot{\mathbf{F}}'\mathbf{F}'^{-1} = \frac{d}{dt}(\mathbf{Q}\mathbf{F})(\mathbf{Q}\mathbf{F})^{-1} = (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^T \\ &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^T = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T \\ &\neq \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T \end{aligned}$$

変形の速さに関する量の客観性 (その1)

変形の速さを表す量である速度ベクトルおよび速度勾配テンソルは, 見たとおり客観性の条件式を満たさない, すなわち, これらの量には客観性がない. 物体と一緒に剛体運動する観測者が見ても変化してしまう量である.

□

変形の速さに関する量の客観性 (その2)

- ・変形速度テンソル(速度勾配テンソルの対称部分)には以下のとおり, 客観性がある

$$d' = \frac{1}{2}(l' + l'^T) = \frac{1}{2}(\dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T) + Q\left[\frac{1}{2}(l + l^T)\right]Q^T$$

ここで,

$$I = QQ^T \rightarrow \dot{I} = \dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T = 0$$

したがって,

$$d' = \frac{1}{2}(l' + l'^T) = Q\left[\frac{1}{2}(l + l^T)\right]Q^T = QlQ^T$$

変形の速さに関する量の客観性 (その2)

- ・速度勾配テンソル l には客観性はないが, その対称部分である変形速度テンソル d には客観性があることが示される.

- ・この事実は, 客観性のないテンソルの対称部分についていつも成立するわけではないことに注意.

□

Cauchy応力テンソルの時間変化率の客観性

- ・Cauchyテンソルの時間変化率には客観性がない

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}' &= \frac{d}{dt}(Q\sigma Q^T) = (\dot{Q}\sigma Q^T + Q\dot{\sigma}Q^T + Q\sigma\dot{Q}^T) \\ &\neq Q\dot{\sigma}Q^T\end{aligned}$$

→ 構成則に用いることの出来る客観性のある
応力速度は？

$$\dot{\tilde{\sigma}}' = Q\dot{\tilde{\sigma}}Q^T \quad ?$$

Cauchy応力テンソルの時間変化率の客観性

・Cauchy応力テンソルの時間変化率(物質時間微分)には, 見たとおり客観性がないので構成則に使うことができない. したがって, それに代わる客観性のある応力速度を探さねばならない. それが種々の応力速度が提案されている問題の起こりである.

□

客観性のある応力速度(その1)

・Jaumannの応力速度

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{[J]} = \dot{\sigma} - \omega\sigma + \sigma\omega \quad \omega = \frac{1}{2}(\dot{I} - \dot{I}^T) : \text{スピンテンソル}$$

$$\dot{\sigma}' = \dot{Q}\sigma Q^T + Q\dot{\sigma}Q^T + Q\sigma\dot{Q}^T \quad \dot{Q} \text{ を消去したい}$$

$$\omega' = \dot{Q}Q^T + Q\omega Q^T \rightarrow \dot{Q} = \omega'Q - Q\omega \quad \text{を利用}$$

$$\omega^T = -\omega, \quad \omega'^T = -\omega'$$

$$\dot{\sigma}' - \omega'\sigma' + \sigma'\omega' = Q(\dot{\sigma} - \omega\sigma + \sigma\omega)Q^T$$

客観性のある雨緑速度(その1)

客観性のある応力速度としてよく知られているJaumannの応力速度がある, Cauchy応力の速度に客観性がないのは, ひとえに剛体回転 Q が時間に依存していて時間微分を受けることに起因する. そこで, 同じ理由で客観性がないスピンテンソルの式を利用して Q の時間微分を消去してみる.

スピンテンソルが反対称テンソルであることも合わせて用いると, 結果として二階テンソルが満たすべき客観性の条件を満足するような「Cauchy応力の時間微分を含む」式が得られる. これをJaumannの応力速度という. Cauchy応力の時間微分以外の項は, 客観性を保証するための項であると解釈できる.

□

客観性のある応力速度(その1)

・ヤウマン(Jaumann)の応力速度

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{[J]} = \dot{\sigma} - \omega\sigma + \sigma\omega \quad \omega = \frac{1}{2}(\dot{I} - \dot{I}^T) : \text{スピンテンソル}$$

$$\dot{\sigma}' = \dot{Q}\sigma Q^T + Q\dot{\sigma}Q^T + Q\sigma\dot{Q}^T \quad \dot{Q} \text{ を消去したい}$$

$$\omega' = \dot{Q}Q^T + Q\omega Q^T \rightarrow \dot{Q} = \omega'Q - Q\omega \quad \text{を利用}$$

$$\omega^T = -\omega, \quad \omega'^T = -\omega'$$

$$\dot{\sigma}' - \omega'\sigma' + \sigma'\omega' = Q(\dot{\sigma} - \omega\sigma + \sigma\omega)Q^T$$

客観性のある応力速度(その1)

客観性のある応力速度として代表的なものの一つにJaumannの応力速度がある。上に示すとおり、スピンテンソルに客観性がないことを示す式を利用して、Cauchy応力速度の客観性を無くしている原因であるQの時間微分を消去することによって得られる。

□

客観性のある応力速度(その2)

- ・コッター - リブリン (Cotter-Rivlin) の応力速度

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{[C]} = \dot{\sigma} + l^T \sigma + \sigma l \quad l: \text{速度勾配テンソル}$$

- ・オールドロイド (Oldroyd) の応力速度

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{[O]} = \dot{\sigma} - l\sigma - \sigma l^T$$

- ・トルウーズデル (Truesdell) の応力速度

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{[T]} = \dot{\sigma} - l\sigma - \sigma l^T + (\text{tr } l)\sigma$$

- ・グリーン - ナグディ (Green-Naghdi) の応力速度

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{[G]} = \dot{\sigma} - \dot{R}R^T \sigma + \sigma \dot{R}R^T \quad R: F = RU = VR$$

変形が小さい場合

$$F = RU = VR \simeq R \quad (\because U = V \simeq I) \quad \rightarrow \quad \dot{\tilde{\sigma}}_{[J]} = \dot{\tilde{\sigma}}_{[C]} = \dot{\tilde{\sigma}}_{[O]} = \dot{\tilde{\sigma}}_{[T]} = \dot{\tilde{\sigma}}_{[G]}$$

客観性のある応力速度(その2)

他にも上のような応力速度が提案されている。それぞれにおいてQの時間微分の消去法が異なる。これらは変形勾配テンソルがF=Rと見なせる程に変形が小さい場合は区別がなくなり、全てがグリーンナグディの応力速度と同じになる。