

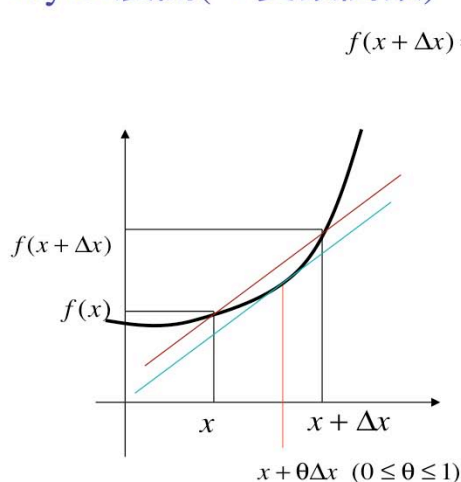
□

## 数学の道具(その3)

- ・ Taylor展開と全微分
- ・ 方向微分, ガトー微分, 変分
- ・ 勾配ベクトル
- ・ ラプラシアン

□

## Taylor展開(1変数関数)



$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{(\Delta x)^2}{2} + f'''(x)\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

$$+ f^{(k)}(x)\frac{(\Delta x)^k}{k!} + \dots + \boxed{f^{(n)}(x + \theta\Delta x)\frac{(\Delta x)^n}{n!}}$$

- ・ いつやめても良い
- ・ やめるときは  $x + \theta\Delta x$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ )

### (Taylorの定理)

平均値の定理 ( $n=1$  でやめた時)

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$$

$$\therefore f'(x + \theta\Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

### Taylor展開による近似

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{(\Delta x)^2}{2} + \dots + f^{(k)}(x)\frac{(\Delta x)^k}{k!}$$

□

## Taylor展開

Taylorの定理は、 $n$ 階導関数が連続な関数について、注目する点 $x$ から $\Delta x$ 隔てた点について図中の級数が成立することをいう、最後に打ちきるときに $x$ と $x + \Delta x$ の中間のどこかに値が存在して等式が成り立つのである。1階導関数で打ち切れば良く知られた平均値の定理である。

そのような中間点の存在は保証されるが、その求め方はわからない。そこで、中間点ではなく $x$ で $n$ 階導関数の値を評価することにしたのがTaylor展開による近似式である。

□

## 全微分（1変数関数）

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{(\Delta x)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x + \theta\Delta x)\frac{(\Delta x)^n}{n!} \\ &= \boxed{f'(x)\Delta x} + O(|\Delta x|^2)\end{aligned}$$

( )の中と同程度の微小量

$\Delta x \rightarrow 0$  につれて  $\Delta f \rightarrow 0$  となるときに主要部

(  $\Delta x$  と同じ速さで小さくなる部分)

→ 微分  $df$  と表す

$\Delta x$  は  $f(x) = x$  のときの主要部そのもの  $\rightarrow \Delta x = dx$

微分同士の関係

$$df = f'(x)dx$$

通常はこれを  
「全微分」と言う

□

## 全微分

$x$  から  $\Delta x$  だけ隔てた点の関数値との差に注目する。Taylor展開を用いてその差を表すと図中の式のようなになる。  $\Delta x$  をゼロに近づけることを考えたとき、  $\Delta x$  と同じスピードで小さくなる関数値の差の部分に主要部といい微分  $df$  と表す。また、  $\Delta x$  自身が主要部だから微分は  $dx$  である。これら微分の関係を表した式が全微分の式である。導関数の定義では通常  $df/dx$  という分数表記が用いられ、  $df$  と  $dx$  には積極的な意味が与えられていない。しかし、このようにそれぞれの量の微分を定義すれば、導関数  $df/dx$  は微分量の商として具体的な意味を有する。

□

## Taylor展開(多変数関数)

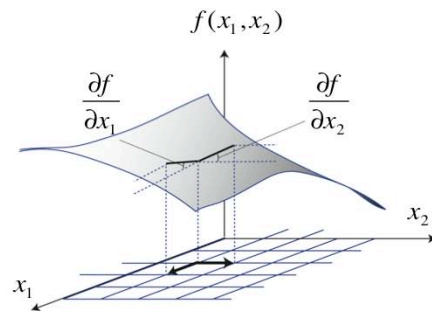
$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$$

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = f(x_1, x_2) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right)_{(x_1, x_2)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \Delta x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \Delta x_2^2 \right)_{(x_1, x_2)} + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n C_k^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^k \partial x_2^{n-k}} \Delta x_1^k \Delta x_2^{n-k} \right)_{(x_1 + \theta \Delta x_1, x_2 + \theta \Delta x_2)}$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{Bmatrix}, \quad \nabla f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

勾配ベクトル      ヘッセ行列



$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} + O(\|\Delta \mathbf{x}\|^3)$$

$$= f(\mathbf{x}) + \nabla f \cdot \Delta \mathbf{x} + O(\|\Delta \mathbf{x}\|^2)$$

□

## Taylor展開(多変数関数)

多変数関数の場合のTaylor展開. 一変数の場合から類推して, 「変数が増えればこうなるんだなあ・・・」と飲み込んでおく. そのうち慣れる.

□

## 全微分（多変数関数）

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \\ &= \nabla f \cdot \Delta \mathbf{x} + O(\|\Delta \mathbf{x}\|^2)\end{aligned}$$

$\|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0$  につれて  $\Delta f \rightarrow 0$  となるときの主要部  
( $\|\Delta \mathbf{x}\|$  と同じ速さで小さくなる部分)

→ 全微分  $df$  と表す

$\Delta \mathbf{x}$  は  $f(\mathbf{x}) = x$  のときの主要部そのもの →  $\Delta \mathbf{x} = d\mathbf{x}$

全微分の関係

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{x} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

□

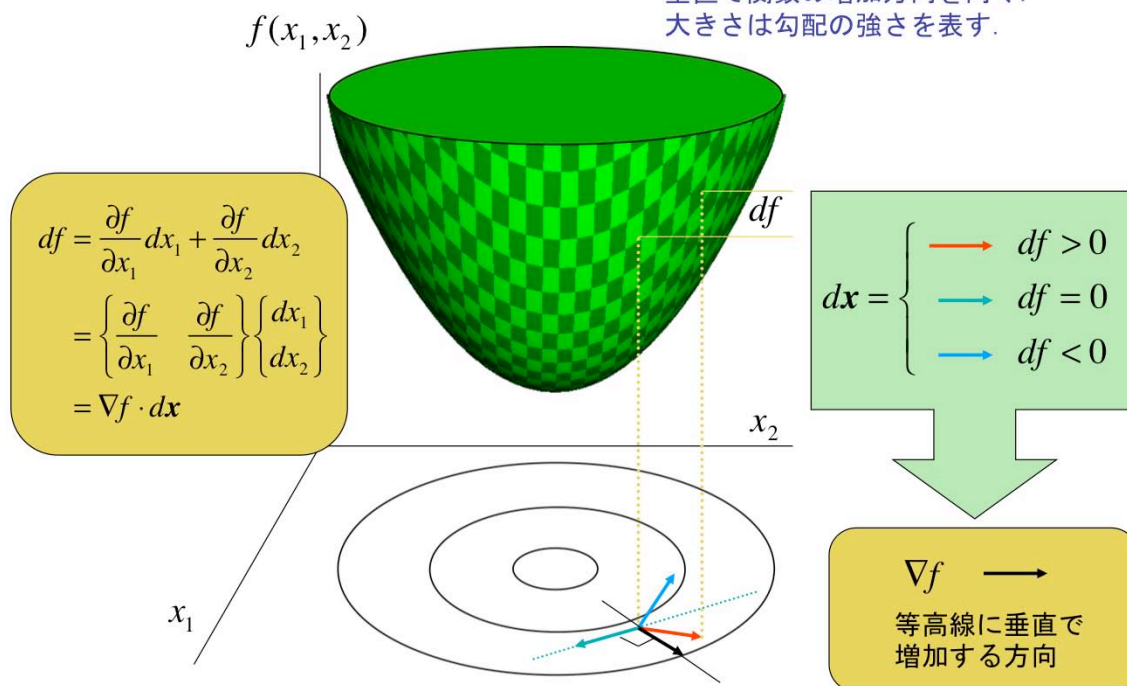
## 全微分（多変数関数）

主要部，微分の考え方は一変数の場合と同じである．ここでの  $\Delta \mathbf{x}$  は点  $\mathbf{x}$  から任意方向に向く微分ベクトルである．点  $\mathbf{x}$  に立って微分ベクトル  $d\mathbf{x}$  の方向を見たとき，関数値の変化は勾配ベクトルと微分ベクトル  $d\mathbf{x}$  の内積で与えられるということ．

□

## 勾配ベクトルの図的理解

$\nabla f$  は、その点を通る等高線に垂直で関数の増加方向を向く。  
大きさは勾配の強さを表す。



□

## 勾配ベクトルの図的理解

2変数関数  $f$  があって、関数曲面が図のようであるとする。また、関数値の等高線は図に見るようであるとする。今、ある点  $(x_1, x_2)$  に注目する、

点  $(x_1, x_2)$  から見た十分に近傍の点  $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$  の関数値の増分  $df$  は、十分に近い点ならば全微分 (Taylor展開の1次微分の項) を調べればよい。

その増分  $df$  は勾配ベクトルと2点間の位置の差を表す微小ベクトル  $dx = \{dx_1, dx_2\}$  との内積で表されることに留意する。

図から次のことが判る。

(1) 等高線上を微小距離だけ移動する緑の  $dx$  離れた点では、関数値は変化無し ( $df=0$ )

→ 勾配ベクトルは緑のベクトルと直交する。 → 勾配ベクトルは等高線に垂直である。

(2) 赤いベクトル  $dx$  だけ離れた点へ向かうと関数値は増える ( $df>0$ )

(3) 青いベクトル  $dx$  だけ離れた点へ向かうと関数値は減る ( $df<0$ )

→ 勾配ベクトルは関数値が増加する方向を向く。

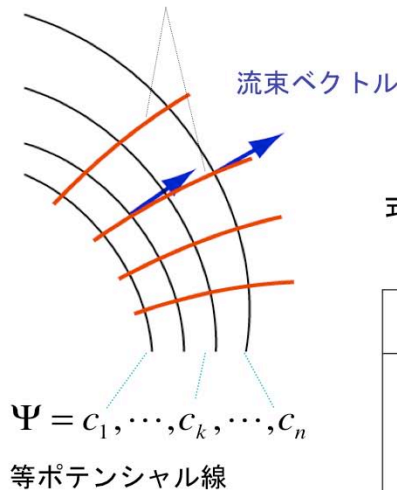
(4) 勾配ベクトルが大きくなれば内積の結果である関数の増加 (減少) 量も大きい。

→ 勾配ベクトルの長さが勾配の強さ、すなわち関数の変化率の大きさを表す。等高線が密な部分 (変化が急激な所) ほど勾配ベクトルは大きくなる。

□

## 等ポテンシャル線と流線 : 至るところで互いに直交している

流線 : 流束ベクトルをつないだもの



$$q(x) = -\lambda \nabla \Psi(x)$$

$\Psi(x)$  : ポテンシャル関数

「何か」の場の強さ

$q(x)$  : 流束ベクトル(flux)

単位時間・単位面積当たり  
の「何か」の移動量

$\lambda$  : 比例係数

式の日本語訳 : 高い方から低い方へ流れる

(例)

|      | $\Psi$ | $q$ | $\lambda$ |         |
|------|--------|-----|-----------|---------|
| 熱の移動 | 温度     | 熱   | 熱伝導係数     | 「フーリエ則」 |
| 物質移行 | 濃度     | 物質  | 拡散係数      | 「フィック則」 |
| 浸透流  | 水頭     | 流速  | 透水係数      | 「ダルシー則」 |

## 等ポテンシャル線と流線

### ・流束ベクトル (flux vector)

何かの量が3次元空間を移動する(流れる)ことを考える. その移動を定量的に表すために, 移動方向に垂直な面を考えて単位面積当たりを単位時間に通過する量に注目するとそれはベクトル量である. それを流束ベクトル (flux vector) という.  
「流束」の束という漢字が良くそのニュアンスを表している. 名訳である.

### ・ポテンシャル

空間に分布する「何か」の強さ. その勾配ベクトルが「ある量の流束ベクトル」として物理的な意味を持つとき, それを生み出す源泉という意味で「ポテンシャル」という.

### ・種々のモデル

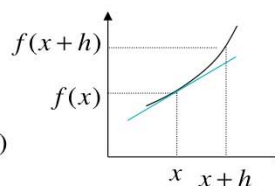
ポテンシャルと流束ベクトルの組み合わせは色々ある. 熱の移動現象を例にとると, 流束ベクトルは熱量そのもの, 場の強さとして空間に分布して熱の移動現象の源泉となっているポテンシャルは温度である. そして, その時の係数は熱伝導係数と呼ばれる. 右辺に負号がつくのは, 温度が高い方から低い方へ熱が流れることを表すためである. この時の式をフーリエ則という. 他に, 物質移行を記述するフィック則, 地盤中の浸透流を記述するダルシー則などがある,

□

## 一変数関数の微分, 多変数関数の方向微分

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{ah} \cdot a = a \cdot f'(x)$$

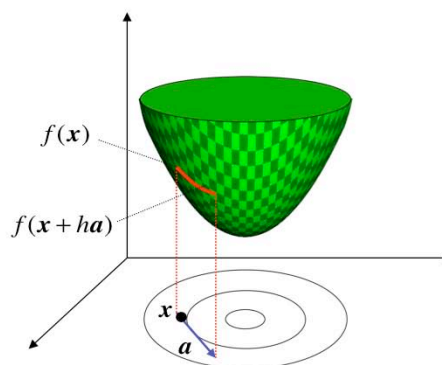


$$(\times) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a} = f'(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ha) - f(x)}{h} = \nabla f(x) \cdot a$$

$a = n$  : 単位ベクトル

$$\nabla f(x) \cdot n = \frac{\partial f}{\partial n} \quad \text{方向微係数}$$



### 一変数の微分と多変数関数の方向微分

#### • 一変数の微分

その定義は高校で習ったとおり.

#### • 多変数関数の方向微分

多変数関数があるときに, 点  $x$  におけるベクトル  $a$  方向の変化率を見るのが方向微分. それを考える際に,  $\times$  をつけた式のように, 一変数関数の微分を乱暴に拡張してもダメ. 何故なら, 「ベクトルで割る」という演算は数学的に定義できないからである.

$a$  方向に関数の値の変化率を調べながら極限操作を行うというのが正しい方法である. 極限が存在するとき, それを方向微分という. 任意のベクトル  $a$  について方向微分が存在するとき, それは勾配ベクトルと  $a$  との内積で与えられる. どうしてそうなるかは, 一次元関数の極限操作の係数  $a$  が入った例をみれば理解しやすい.

#### • 方向微係数

ベクトル  $a$  が単位ベクトル  $n$  のとき,  $x$  における方向微分を  $n$  方向の方向微係数という.



□

## 多変数関数の方向微分，ガトー微分，変分

### 方向微分

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})}{h} = \left. \frac{d\Psi(h)}{dh} \right|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\nabla f \cdot (h\mathbf{a}) + O(\|h\mathbf{a}\|^2)] = \nabla f \cdot \mathbf{a}$$

### ガトー微分

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(\mathbf{u} + h\mathbf{a}) - G(\mathbf{u})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\nabla_u G \cdot (h\mathbf{a}) + O(\|h\mathbf{a}\|^2)] = \nabla_u G \cdot \mathbf{a}$$

### 変分

$$\delta G = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(\mathbf{u} + h(\delta \mathbf{u})) - G(\mathbf{u})}{h} = \nabla_u G \cdot \delta \mathbf{u}$$

□

## 多変数関数の方向微分，ガトー微分，変分

### ・方向微分

今， $\mathbf{a}$ を定ベクトルとして， $\Delta \mathbf{x} = h\mathbf{a}$ のように与えて $h$ をゼロに近づけることで，定ベクトル $\mathbf{a}$ 方向の関数の変化率を調べることができる．これを $\mathbf{a}$ 方向の方向微分といい，変化率を方向微係数という．方向微係数は勾配ベクトルと定ベクトルの内積になる．

### ・ガトー (Gateaux) 微分

$G$ がベクトル値関数 $\mathbf{u}$ の汎関数のとき， $G$ に対して方向微分と同様の操作を行うことができる．これをガトー微分という．方向微分が三次元空間を定義域とする関数に対するものとすれば，ガトー微分は方向微分のより一般的な関数への拡張である．

### ・変分

ガトー微分において，定ベクトル $\mathbf{a}$ を変数 $\mathbf{u}$ の許容変化である変分 $\delta \mathbf{u}$ に選んだものが変分である．変分の結果得られるガトー微分の値は汎関数 $G$ の第一変分と呼ばれ $\delta G$ のように表される．

□

## ベクトル値関数（ベクトル場）の全微分

\* 各成分毎に全微分を考えればよい.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{Bmatrix} \Rightarrow d\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} du_1(x_1, x_2, x_3) \\ du_2(x_1, x_2, x_3) \\ du_3(x_1, x_2, x_3) \end{Bmatrix}$$

$$du_k = \nabla u_k \cdot d\mathbf{x} = \left\{ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_3} \right\} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} \quad (k=1,2,3)$$

$$\begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \frac{\partial u_k}{\partial x_2} & \frac{\partial u_k}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \frac{\partial u_k}{\partial x_2} & \frac{\partial u_k}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \frac{\partial u_k}{\partial x_2} & \frac{\partial u_k}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow d\mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} d\mathbf{x}$$

## ベクトル値関数（ベクトル場）の全微分

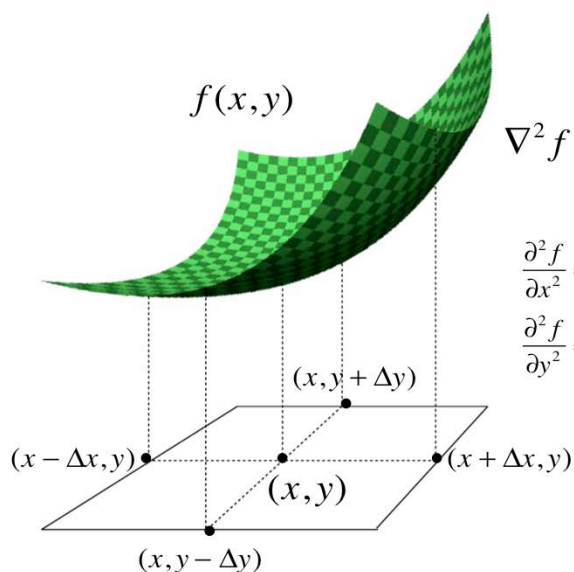
ベクトル値関数（ベクトル場）は3つの成分がスカラー場を成している．ベクトル値関数の場合には，スカラー値関数である各成分の勾配を考えてそれを寄せ集める操作を行えばよい．

ベクトル値関数（ベクトル場）の全微分は，独立変数の微分ベクトル  $d\mathbf{x}$  から関数値の微分ベクトル  $d\mathbf{u}$  への線形変換の関係として与えられる．そして，その変換作用素がベクトル場の勾配である．

ベクトルの線形変換作用素は二階テンソル，すなわちベクトル場の勾配は二階テンソルである．このように，スカラー場（ゼロ階テンソル）の勾配はベクトル（1階テンソル）になり，ベクトル場（1階テンソル）の勾配は2階テンソルになる．

□

## ラプラシアン $\nabla^2 f$ の図的理解



$\nabla^2 f$  は、周囲の点の平均値との  
大小関係を表す（その点における  
面の曲率を表す）。

$$\nabla^2 f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{f(x+\Delta x, y) + f(x-\Delta x, y)}{2} - f(x, y) \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{2}{(\Delta y)^2} \left[ \frac{f(x, y+\Delta y) + f(x, y-\Delta y)}{2} - f(x, y) \right]$$

（例）

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \theta \quad (\text{熱伝導})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \nabla^2 u \quad (\text{膜の振動})$$

□

## ラプラシアンの図的理解

ラプラシアンはその点の曲率を表すと考えて良い。差分を見ると良く解るように、前後左右の点の平均値よりも小さい場合（曲面が下に凸の場合）は正、平均値よりも大きい場合（曲面が凹）は負となる。

## 熱伝導方程式の図的理解

温度上昇の速さ

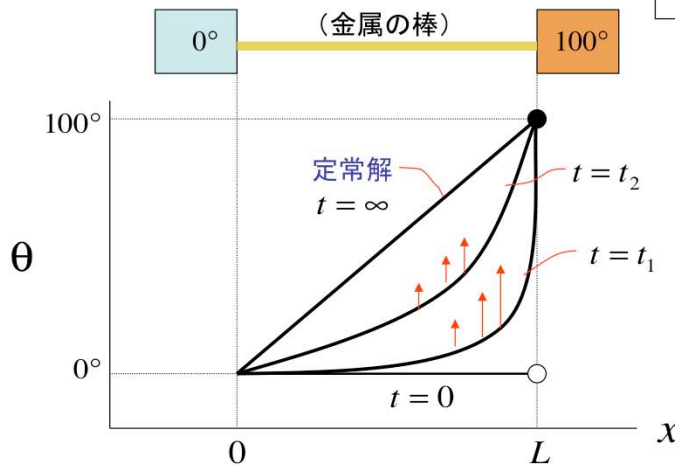
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

曲線の曲率  
と考えて良い

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \approx \frac{2}{(\Delta x)^2} \left( \frac{\theta_{k+1} + \theta_{k-1}}{2} - \theta_k \right)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} > 0$$



初期条件

$$\theta(x, 0) = 0$$

境界条件

$$\begin{cases} \theta(0, t) = 0 \\ \theta(L, t) = 100 \end{cases}$$

## 熱伝導方程式の図的理解

### ・方程式の各項の幾何学的な意味

左辺は温度の時間微分だから温度上昇の速さである。右辺は温度の空間座標に関する二階微分だから、温度曲線の曲率に相当する。それは高校で習ったとおり、下に凸ならば正、上に凸ならば負の値をとり、値が大きいほど曲線の曲がり具合はキツイ。あるいは、差分近似してみると判るように、「注目する点とその前後の点での値の平均値に比べてどれくらい少ないか」を表していると理解してもよい。

したがって、熱伝導方程式を日本語で解釈すれば、「棒の各点の温度は、温度の空間分布の曲率に比例した速さで上昇する。」となる。だから、時間の経過とともに温度分布曲線は直線に近づき、直線になると変化しない（定常解）となることは容易に理解できる。

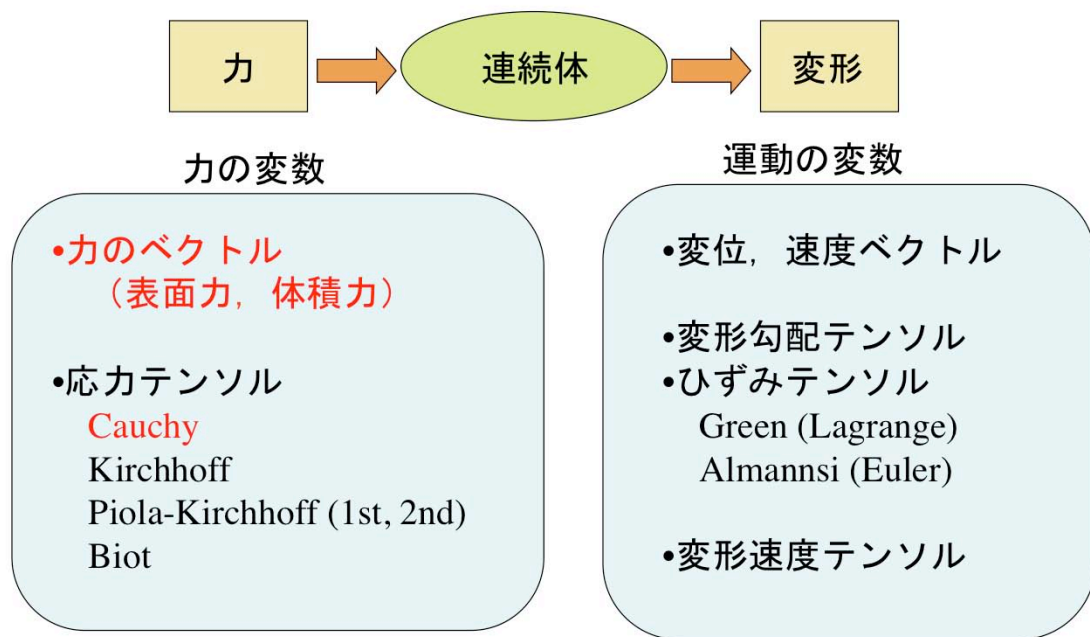
□

## 連続体力学(その3)

- ・ 運動の記述
- ・ 変形勾配テンソル

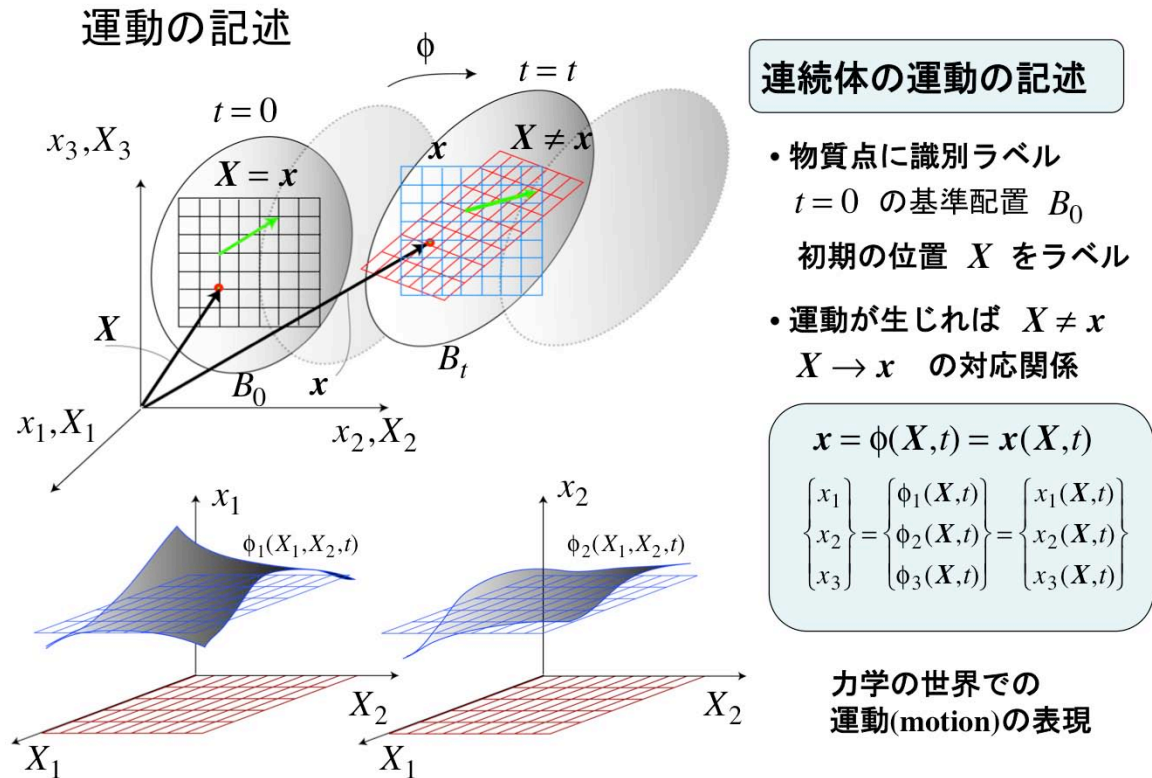
□

## 連続体力学（非線形）の記述のための変数群



- 
- ・・・以上，表面力ベクトルや体積力ベクトルなどの力のベクトルと，Cauchy応力を学んだ．Cauchy応力は他の応力の全ての基本である．  
次は力の変数を離れ，運動の変数について見ることにする．

□



□

#### 運動の記述

##### ・連続体の運動：変形しながら移動

連続体は物質点がぎっしりと詰まった状態で構成されている。連続体が運動するときには、それら物質点は隣との連結状態を保ちながら移動する。そして、連続体に変形するのは、各物質点の移動の仕方が少しずつ違うため・・・と理解できる。

##### ・連続体の運動の記述

そのような連続体の運動を記述するには、各物質点の基準状態からの移動に注目するとわかりやすい。すなわち：

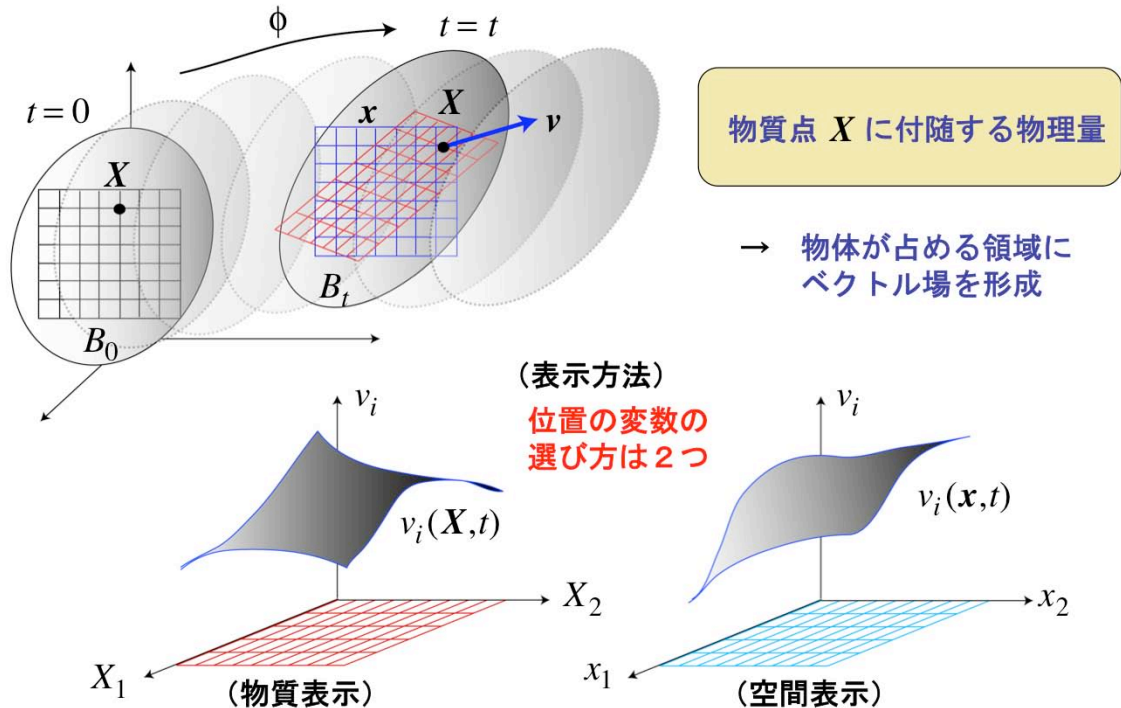
- (1) 時刻 $t=0$ での配置を基準配置として、物体を構成している物質点の全てに名前（ラベル）を付ける。名前には $t=0$ におけるその点の位置座標を用いる。大文字ベクトルの $X$ で表す。
- (2) 運動に伴って各物質点の位置が時刻と共に変化する。その様子を、物質点 $X$ と時刻 $t$ を指定すると物質点の現在の位置ベクトル $x$ が決まる関数として表す。

この元の位置ベクトル $X$ と現在時刻の位置ベクトル $x$ を対応させる関数により、変形しながら移動する物体の運動が完全に記述できる。このベクトル値関数を文字通り「運動」(motion)と呼ぶ。「運動」は、物体の基準配置を定義域とするベクトル値関数であり、ベクトル場を形成する。

このベクトル値関数では、現在時刻の位置ベクトル $x$ の3つの各成分がその物質点のラベル $X$ （基準配置における位置ベクトル）の関数となっている。図は2次元の場合のイメージである。現在時刻における位置ベクトル $x$ の各成分は、基準配置座標の関数として図に示すような曲面（超曲面）になっているとイメージすればよい。

物理的には基準配置の座標軸 $X$ は物体の変形に伴って曲がっている。しかし、関数の定義域として数学的に考える限りは、それが現実世界で変形していても関係ない。あくまでも基準配置で設定した直交座標（変形しない初めの状態）を考えればよいことに注意する。念のため。

## 関数の物質表示と空間表示



## 関数の物質表示と空間表示

### ・関数の物質表示と空間表示

物体の運動に関して現れる物理量は全てが物質点に付随している。したがって、それらを  $f(X, t)$  のように、まずは物質点  $X$  と時刻  $t$  の関数として表すのが直感的に理解しやすい。しかし、何も物理量を表す関数だからといって、位置を示す変数が必ず物質点  $X$  でなければならない理由はない。物質点座標  $X$  の代わりに物質点  $X$  が占める空間の位置  $x$  を用いて関数を表現してもいっように構わない。  $X$  から  $x$  への変数変換には運動関数の逆関数を用いればよい。

物理量を表す関数を記述する際に、位置の変数として空間座標  $x$  を用いるならば「ある時刻  $t$  において物体が占める空間点  $x$  に物理量が存在・分布している」というイメージになる。

位置の変数に物質点座標  $X$  を用いた表現を「物質表示」、空間座標を用いた表現を「空間表示」という。場合に応じて使い分ければよい。



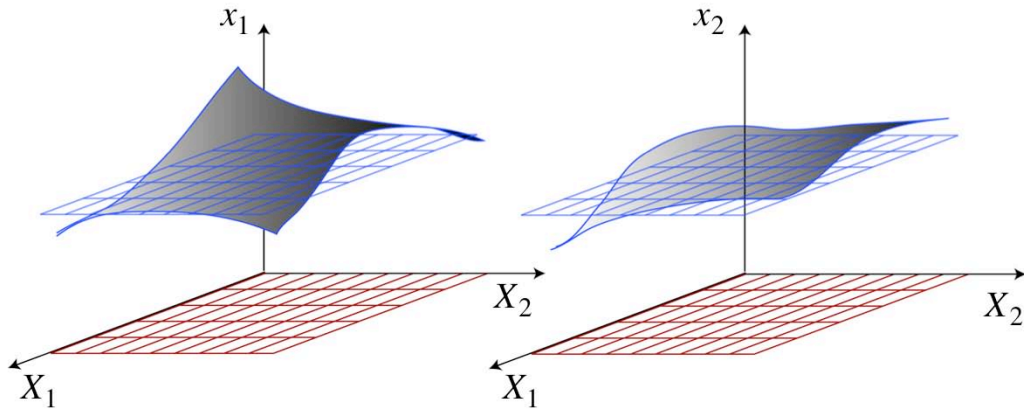
□

## 運動 (motion)

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1(\mathbf{X}, t) \\ \phi_2(\mathbf{X}, t) \\ \phi_3(\mathbf{X}, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1(\mathbf{X}, t) \\ x_2(\mathbf{X}, t) \\ x_3(\mathbf{X}, t) \end{Bmatrix}$$

物質点  $\mathbf{X}$  の現在の位置  $\mathbf{x}$   
を  $\mathbf{X}$  に付随する量として  
物質表示したもの

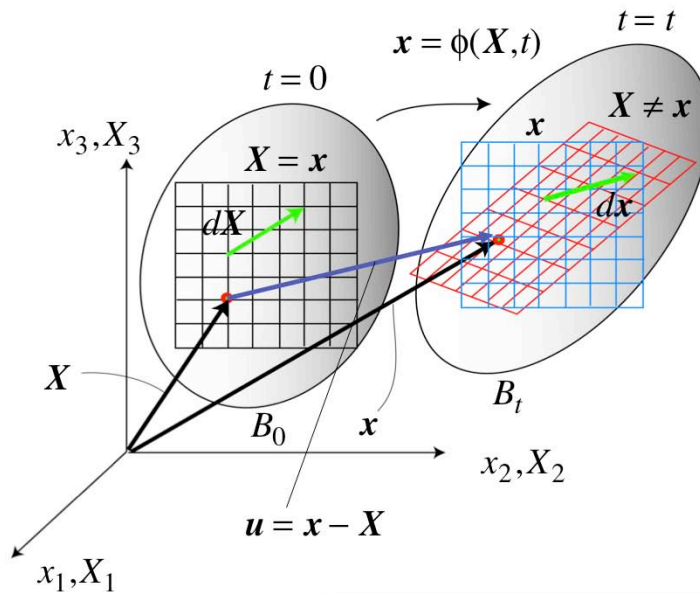


## 運動 (motion)

運動 (motion) は、物質点  $\mathbf{X}$  が時刻  $t$  において占める空間の位置ベクトル  $\mathbf{x}$  を、その物質点に付随する量として物質表示した関数のことである。

この割り切った見方を頭の隅に置いておくと、連続体力学における変形の記述（運動学的記述）の見通しが良くなると思う。

## 変位ベクトルと変形勾配テンソル



(物質点の) 変位ベクトル

$$u = x - X$$

1点における変形の様子とは？

- 微小線素ベクトルの変化に注目.

$$dX \rightarrow dx$$

- 運動のTaylor展開を用いて

$$dx = \phi(X + dX, t) - \phi(X, t)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial X} dX = \frac{\partial x}{\partial X} dX$$

$$= F dX$$

$$\therefore F \equiv \frac{\partial \phi}{\partial X} \equiv \frac{\partial x}{\partial X} \quad \text{変形勾配テンソル}$$

### 変位ベクトルと変位勾配テンソル

- ベクトル値関数「運動 (motion)」だけでは変形は判らない

関数「運動」によって物体の運動は完全に記述される. しかしそれは各物質点の位置変化の様子を記述しただけであり, 物体の変形の様子についてはピンとこない. したがって, もっと直接的に移動や変形を表す量を考えることにする.

- 変位ベクトル

各物質点が「どの方向にどのくらい移動したか」を見るために, 現在の位置ベクトル  $x$  から物質点のラベルのベクトル  $X$  を引き算する. 物質点のラベルを再びベクトル量と見直すならば, それは基準配置での位置ベクトルを表しているから, 引き算の結果は基準配置からの移動量 (方向と大きさ) を表すベクトルになる. これを「変位ベクトル」という. 変位ベクトルは物体が占める空間領域を定義域とするベクトル場を形成する. 変位ベクトルによって各物質点の移動の様子がより直接的に判る.

- 変形勾配テンソル

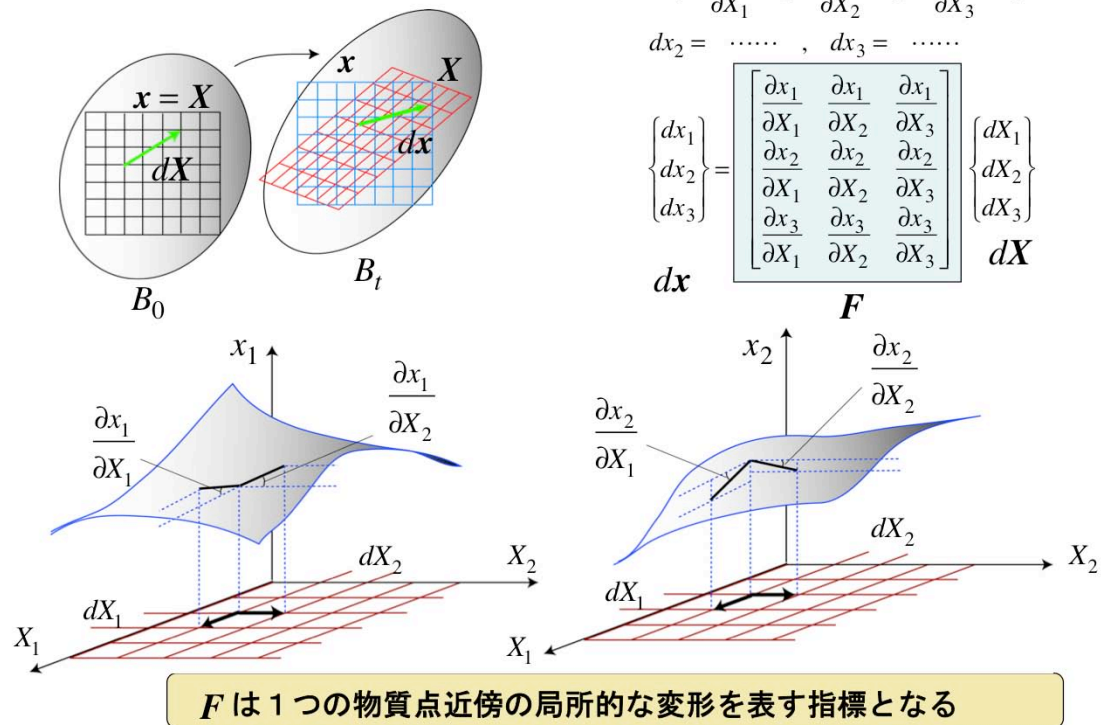
しかし, 変位ベクトルでは物体の変形の様子が今ひとつピンと来ない. 変形には物質点の変位そのものではなく, 隣り合う物質点の間の変位の差が関係する. どんなに大きな変位が生じようとも, 全ての物質点と同じ変位ベクトルの分だけ移動するならば, 物体は大きく移動しただけでその形は変わらない.

そこで, 変形の様子を表現するために, 物質点  $X$  近傍における微小線素ベクトル  $dX$  の変化に注目する. それには, 物質点  $X$  と物質点  $X + dX$  が現在時刻  $t$  においてどの位置にあるかを調べ, その差のベクトル  $dx$  がどうなっているかを見ればよい. その様子は「Taylor展開における主要部分」によって, 図に示すような関係式で記述される.

この関係式  $dx = F dX$  は, 「元の微小線素ベクトル  $dX$  が  $F$  によって変形後の微小線素ベクトル  $dx$  に移される」ことを表している. そして,  $F$  はその定義式に見るとおり「運動」関数の基準配置座標による偏微分であり, 物体の「運動」関数から決まる量である.  $F$  は, 微小線素ベクトルの変化を通して一点における変形の強さを表している量であり, 次に示すように  $3 \times 3$  正方行列で表現される 2 階のテンソルである. この  $F$  を「変形勾配テンソル」という.

□

## 変形勾配テンソルの成分



□

## 変形勾配テンソルの成分

### ・行列による表現

微小線素ベクトル  $dX$ ,  $dx$  の関係式を成分で表し、それを行列の形に表すと図中の式になる。変形勾配テンソルの各成分は「運動」関数の各成分  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  を、基準配置座標  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  それぞれで微分した 9 つの偏導関数である。

それら偏導関数は図に示すように運動関数の各成分の関数曲面における接平面の勾配を表している。勾配がキツイ付近ほど変形は大きい。変形勾配テンソルはそれらを行列の形に一つにまとめたテンソルである。変形の様子を表す丸ごとの量として捉えることが肝心。行列の中身は必要に応じて覗けばよい。

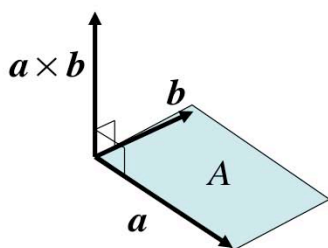
□

## 数学の道具(その4)

- ・ 物質表示と空間表示
- ・ 物質微分
- ・ 輸送定理

□

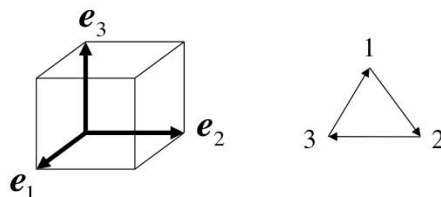
## ベクトルの外積



$$\|a \times b\| = A$$

- ・  $a \rightarrow b$  へ右ネジ方向  

$$b \times a = -a \times b$$
- ・ 長さは平行四辺形の面積
- ・ 平行四辺形に垂直



$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3, & e_2 \times e_3 &= e_1, & e_3 \times e_1 &= e_2 \\ e_2 \times e_1 &= -e_3, & e_3 \times e_2 &= -e_1, & e_1 \times e_3 &= -e_2 \\ e_1 \times e_1 &= e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = 0 \end{aligned}$$

置換記号 (permutation symbol)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k): \text{clockwise.} \\ -1 & (i, j, k): \text{anti-clockwise.} \\ 0 & (i, j, k): \text{if } i = j \text{ or } j = k \text{ or } k = i. \end{cases}$$

$$e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$$

$$e_1 \times e_2 = \varepsilon_{121} e_1 + \varepsilon_{122} e_2 + \varepsilon_{123} e_3 = e_3$$

0                  0                  1

## ベクトルの外積

二つのベクトルに対して、それらが作る平行四辺形の面積の長さを持ち、二つのベクトルに右ネジ方向で平行四辺形に垂直なベクトルを対応させる演算を外積という。外積は内積のように交換可能な演算ではない。順番を入れ替えると負号がつく。ベクトルを右ネジ方向に立てるのだから、順番を入れ替えれば右ネジ方向が逆になるからである。また、自分自身との外積は面積がゼロなのでゼロである。

正規直交系の外積は時計回りの法則にしたがって式に示すようになる。ここで、この関係を表すのに便利な置換記号を導入する。置換記号と総和規約を用いると、図中の9個の式は一つの式で表すことが出来る。

□

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_i \mathbf{e}_i) \times (b_j \mathbf{e}_j) \\
 &= a_i b_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \\
 &= \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k
 \end{aligned}
 \qquad
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

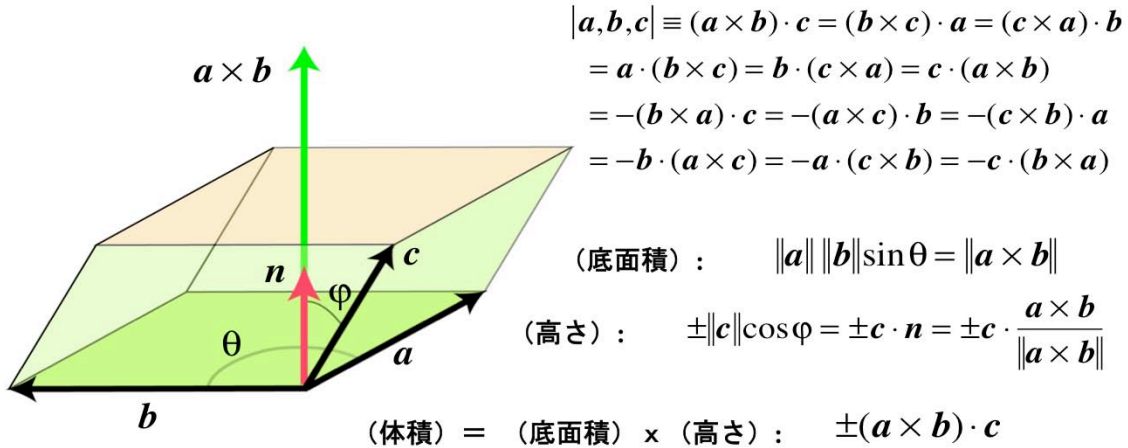
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3$$

二つのベクトルの外積を実際に行ってみる．ひだりは置換記号を用いて総和規約に従って行った計算である．右は線形代数の教科書などに出ているが，あたかも行列式のように計算する方法である．

□

## スカラー三重積

3つのベクトルが作る平行六面体の符号付き体積



重要な公式 :  $|Aa, Ab, Ac| = \det A |a, b, c|$

## スカラー三重積

応力テンソルをより深く知るために「固有値と固有ベクトル」に関する数学的知識が有効な道具として機能した。それと同様，変形を扱うのに有効かつ不可欠な数学の道具のひとつにスカラー三重積がある。

### ・スカラー三重積

3つのベクトルが作る平行六面体の体積に正負の符号をつけたスカラー量を与える。符号は，3つのベクトルが右手系を成しているときに正，左手系の時に負となる。スカラー三重積については図的イメージをきちんと理解しておくのがよい。まず，2つのベクトルの外積が，それらが作る平行四辺形の面積を長さにもち，それら2つのベクトルと右手系をなすベクトルを与える。そして，残りの3つめのベクトルとの内積が平行四面体の体積となる。

### ・重要な公式

2階テンソル（ $3 \times 3$ 行列） $A$ によって3つのベクトル $a, b, c$ をベクトル $Aa, Ab, Ac$ に変換して，そのベクトル三重積をつくると，それは元のベクトルの三重積に行列 $A$ の行列式を乗じた値に等しい。これは非常に重要な公式である。

□

## 正方行列の直和分解

任意の正方行列は対称行列と反対称行列の和に一意に分解できる.

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = A_s + A_a$$

対称行列

$$A_s^T = A_s$$

反対称行列

$$A_a^T = -A_a$$

(例)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 正方行列の加算分解

任意の正方行列は対称行列と反対称行列の和に分解される.

反対称行列とは, 転置すると負号がつく行列のことをいう. 分解できることは例に示すとおりである.



□

## 二階テンソルの内積

$$(a \otimes b) : (c \otimes d) = (a \cdot c)(b \cdot d)$$

$$\begin{aligned} A : B &= (A_{ij}(e_i \otimes e_j)) : (B_{kl}(e_k \otimes e_l)) = A_{ij}B_{kl}(e_i \otimes e_j) : (e_k \otimes e_l) \\ &= A_{ij}B_{kl}(e_i \cdot e_k)(e_j \cdot e_l) = A_{ij}B_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} = A_{ij}B_{ij} \\ &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + \cdots + A_{33}B_{33} \end{aligned}$$

$$= \text{tr}([A]^T[B]) = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ \vdots \\ B_{33} \end{Bmatrix}$$

## 二階テンソルの内積

### ・内積

「内積」とは、線形構造をもつある集合（線形空間）があるときに、その中の任意の二つの要素に実数を対応させる演算で、線形性、可換性、正值性の三つの性質を有するものをいう。

そのような性質を満たせば何でも「内積」として採用できる。そして、その採用した内積を用いて要素の長さと二つの要素がなす角度が定義される。「内積」は長さと角度が測る分度器のようなものである。内積をゼロにする二つの要素を「互いに直交する」という。内積が定義されて長さと角度が測れるようになった線形空間をユークリッド空間という。

我々はそんな内積の中で、現実の問題に適用したときに色々と便利なものを使っている。高校で習った3次元ベクトルの内積は、それが教える「長さ」と「直交（直角）」が我々の生活実感に調和している。

### ・二階テンソルの内積

二階のテンソルの内積は、「二つのテンソル積を構成しているベクトルの順番を守ってベクトルの内積を行って積を取る」と定義する。二階テンソルを要素とする線形空間があって、その線形空間における二つの要素に実数を対応させる演算を上のように定義すると、それは線形性、可換性、正值性の三つの性質を満たすので内積として用いることができるということである。このような内積は無限通り考えることができるが、上の内積を使うと生活実感に調和して全てがうまくいく。

正規直交基底の元で二つの二階テンソルA, Bの内積を計算してみると、対応する9つの成分同士の積和を取ることを意味する。それは、行列演算としては、一方を転置しておいて行列の積を計算してその対角項を足す（trace）ことに等しい。さらに、二階テンソルの9つの成分を並べた9次元ベクトル同士の内積であると理解することもできる。

□

## 2 階テンソルの内積に関する重要な事実

対称行列  $B$  と反対称行列  $C$  の内積はゼロである.

$$B : C = \text{tr}(B^T C) = \sum_{i,j} B_{ij} C_{ij} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} B_{ij} C_{ij} &= \sum_{i,j} B_{ji} C_{ji} \\ &= \sum_{i,j} B_{ij} C_{ji} \quad \because B_{ji} = B_{ij} \quad (\text{対称}) \\ &= \sum_{i,j} B_{ij} (-C_{ij}) \quad \because C_{ji} = -C_{ij} \quad (\text{反対称}) \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j} B_{ij} C_{ij} = -\sum_{i,j} B_{ij} C_{ij} \Rightarrow \therefore \sum_{i,j} B_{ij} C_{ij} = 0$$

## 2 階テンソルの内積に関する重要な事実

対称行列と反対称行列の内積はゼロになる. すなわち, 対称部分と反対称部分は, 二階テンソルについての内積がゼロになるという意味で「直交」している. したがって, 二階テンソルを対称部分と反対称部分の和に分解することを直交分解という.

□

対称行列  $B$  と任意の行列  $A$  の内積には対称部分だけが寄与

$$\begin{aligned} B : A &= B : (A_s + A_a) = B : A_s \\ (\because B : A_a &= 0) \end{aligned}$$

反対称行列の対称行列との内積では、その対称部分だけが寄与

対称行列と反対称行列の内積はゼロになる。したがって、対称行列との内積には対称部分だけが関与することになる。

連続体力学においてこのことに関連する重要事項としては、Cauchy応力テンソルが対称だから、変位（速度）勾配テンソルなど、変形を表す運動学的テンソルとの内積を行うと、それらの対称部分のみが内積（仕事）に寄与することになる。こうした数学的事実に基づいて、微小変位論における仕事に関与する微小ひずみテンソルと関与しない微小回転テンソル、速度場の勾配の分解における変形速度テンソルとスピンテンソルが定義されている。

□

## Cauchy応力と変位勾配テンソルの内積

Cauchy応力テンソルは対称  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

(仕事) = (力の変数) × (運動の変数)

$$\begin{aligned} W &= \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} = \sigma_{ij} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ &= \sigma_{ij} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \because \quad \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \end{aligned}$$

対称なテンソルとの内積は対称部分だけが残る！

## Cauchy応力と変位勾配テンソルの内積

変位勾配テンソルの対称部分だけがCauchy応力テンソルとの内積，すなわち仕事に寄与する．

□

## 微小ひずみテンソルと微小回転テンソル

変位勾配テンソル

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{対称部分}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{反対称部分}}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

微小ひずみテンソル

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

微小回転テンソル

Cauchy応力との内積（仕事）に寄与する対称部分を**微小ひずみテンソル**，仕事に無関係な反対称部分を**微小回転テンソル**と呼ぶ。

ついでにいうと，変位ベクトルの代わりに速度ベクトルを用いた速度勾配テンソルについても同様にして，Cauchy応力テンソルとの内積（単位時間当たりの仕事）には，その対称部分だけが寄与する．対称部分を**変形速度テンソル**，反対称部分を**スピンテンソル**と呼ぶ。

□

極分解：任意の正方行列は次のように対称行列と直交行列の積に分解される。それぞれを右極分解，左極分解という。

$$A = QL = MQ$$

$$(L^T = L, \quad M^T = M, \quad Q^T Q = QQ^T = I)$$

\*(メモ)：直交行列  $Q$  はベクトルの長さを変えない回転を与える。

(極分解の作り方)

$$A^T A = (QL)^T (QL) = L^T Q^T QL = L^2 \quad \therefore L = (A^T A)^{\frac{1}{2}}$$

$$AA^T = (MQ)(MQ)^T = MQQ^T M^T = M^2 \quad \therefore M = (AA^T)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = AL^{-1} = M^{-1}A$$



- \* (1) 固有方向に座標変換（対角化）して平方根を求める。
- (2) 逆の座標変換をして元の座標系に戻す。

□

## 極分解

任意の正方行列は対称行列と直交行列の積に分解される。

分解の仕方は図中に式で示したとおり。直交行列とはそれ自身の転置行列が逆行列になるような行列をいう。直交行列は長さを変えない回転を表す。

極分解は図中の式に見るとおり  $A$  から作られる  $L, M$  なる対称行列が左右どちらかによって右極分解，左極分解と呼ばれている。

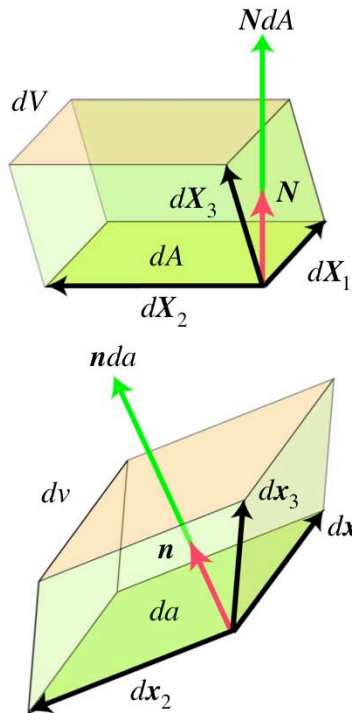
これらの分解についての一意性は線形代数の教科書に必ず出ているので参照されたい。

□

## 連続体力学(その4)

- ・変形に伴う微小な線要素, 面要素, 体積要素の変化
- ・有限ひずみテンソル

## 変形に伴う線要素, 面積要素, 体積要素の変化



- 線要素 (ベクトル  $(dX \rightarrow dx)$ )

$$dx_1 = F dX_1, \quad dx_2 = F dX_2, \quad dx_3 = F dX_3$$

- 体積要素 (スカラー  $(dV \rightarrow dv)$ )

$$\begin{aligned} dv &= [dx_1, dx_2, dx_3] = [F dX_1, F dX_2, F dX_3] \\ &= \det F [dX_1, dX_2, dX_3] \\ &= J dV \end{aligned}$$

$$dv = J dV \quad (J : \text{ヤコビアン})$$

- 面積要素 (ベクトル  $(NdA \rightarrow nda)$ )

$$dV = [dX_1, dX_2, dX_3] = dX_3 \cdot NdA$$

$$dv = [dx_1, dx_2, dx_3] = dx_3 \cdot nda$$

$$= F dX_3 \cdot nda = dX_3 \cdot F^t nda$$

$$dv = J dV = J dX_3 \cdot NdA$$

$$nda = J F^{-T} NdA$$

## 変形に伴う線要素, 面積要素, 体積要素の変化

### • 線要素の変化

微小な線要素  $dX$  が変形によって  $dx$  に変化する様子は, 変形勾配テンソルの定義式に見たとおりである.

### • 体積要素の変化

面積要素の変化を考える前に, 体積要素の変化を考える方が理解しやすい.

変形前の状態で3つの線要素  $dX_1, dX_2, dX_3$  が作る平行六面体を考える. その体積は3つのベクトルの三重積で与えられる. 変形後, これら3つの線要素ベクトルは  $dx_1 = F dX_1, dx_2 = F dX_2, dx_3 = F dX_3$  に移る. その変形後の体積は, 先に学んだ公式から, 変形前の体積に変形勾配テンソルの行列式を乗じたものに等しい. 変形勾配テンソルの行列式をヤコビアンといい  $J$  で表す.

### • 面積要素の変化

面積要素とは, 面の単位法線ベクトルにその面積を係数として乗じたベクトルを指す.

変形前に面積が  $dA$  で単位法線ベクトル  $N$  を持つ面積要素  $NdA$  がどのように変化するかは, 上述の体積要素の変化を手掛かりにして導くことができる. それには図に見るとおり, 線要素ベクトルの外積をあらためて  $dX_1 \times dX_2 = NdA$  として変形前の面積要素と見ればよい. これにもう一つの微小線素ベクトル  $dX_3$  が加わって作られる平行六面体の体積を  $dV = [dX_1, dX_2, dX_3]$  と表しておく.

変形後には面積要素は  $dx_1 \times dx_2 = nda$  に移り, 平行六面体の体積は  $dv = [dx_1, dx_2, dx_3]$  に変わる. 先に見たように体積要素は変形勾配テンソルのヤコビアン  $J$  を用いて  $dv = J dV$  と結びつけられる. これに, 線要素ベクトルの関係  $dx_3 = F dX_3$  を代入して整理すると, 図中の3つめの四角で囲んだ面積要素の変化を与える式を得る. この式はNansonの式と呼ばれている.

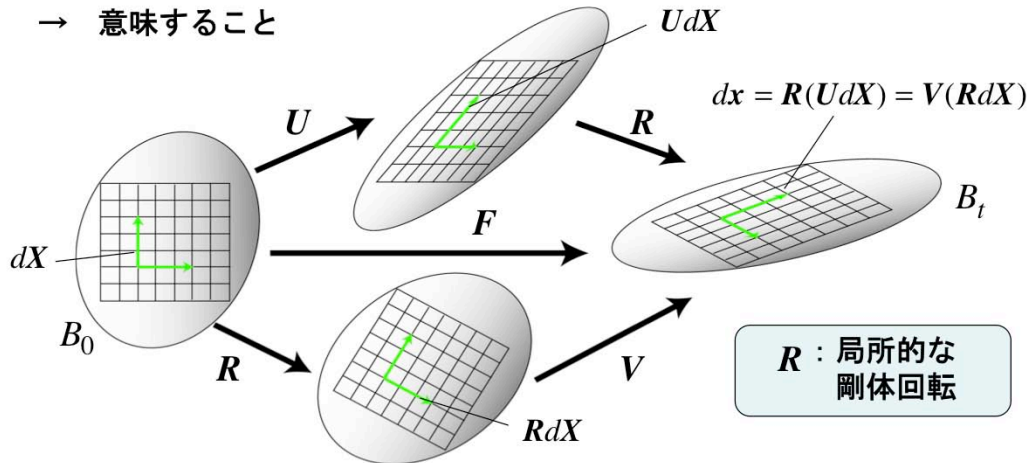


## 変形勾配テンソル $F$ の極分解と 2 つの有限ひずみテンソル

- 変形勾配テンソル  $F \rightarrow$  内部の 1 点近傍の変形状態を表す一つの指標.
- 極分解できる (数学的な事実) .

$$F = RU = VR \quad R: \text{直交テンソル}, \quad U = (F^T F)^{\frac{1}{2}}, \quad V = (FF^T)^{\frac{1}{2}}$$

→ 意味すること



## 変形勾配テンソル $F$ の極分解と 2 つの有限ひずみ

### 変形勾配テンソル $F$ の極分解

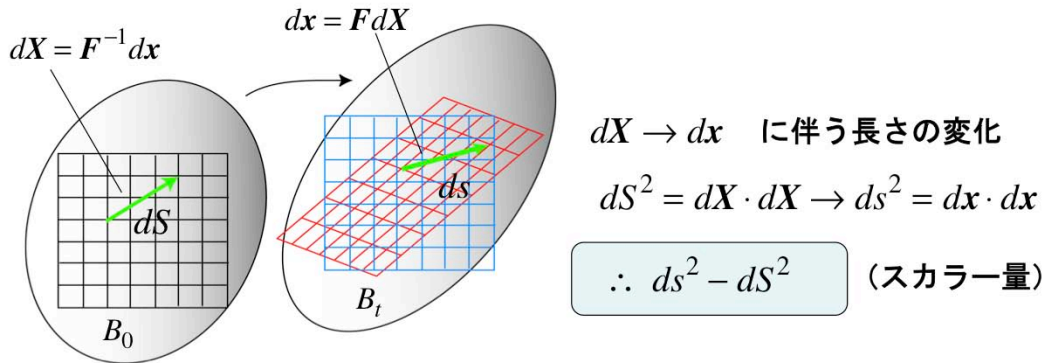
$F$  が  $F=RU=VR$  と左右に極分解できることは数学的な事実. 大事なはその解釈.

線要素  $dX$  は  $dx = FdX$  という関係で変化するが, それを与えている変形は, 対称テンソル  $U$  による形の変化 (伸び・縮み, せん断など) とそれに続く  $R$  による回転, または,  $R$  による回転に続く  $V$  による形の変化の結果である. 極分解によって, 変形勾配テンソル  $F$  が表現している変形状態は, 伸び (縮み) やせん断といった純粋な形の変化と剛体的な回転の 2 つの過程から成立していることが判る.

□

## 局所的な剛体回転を含まない指標 —ひずみテンソル—

→ 運動による線要素の長さの変化に注目.



(1)

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= dx \cdot dx - dX \cdot dX \\ &= (FdX) \cdot (FdX) - dX \cdot dX \\ &= dX \cdot (F^T F - I) dX \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= dx \cdot dx - dX \cdot dX \\ &= dx \cdot dx - (F^{-1}dx) \cdot (F^{-1}dx) \\ &= dx \cdot (I - (FF^T)^{-1}) dx \end{aligned}$$

□

## 局所的な剛体回転を含まない変形の指標

### ・剛体回転を含まない変形の指標

変形勾配テンソルFには局所的な剛体回転成分が含まれている。(それでも構わないのだが) できれば回転には関係しない指標も欲しい. それが「ひずみテンソル」である.

### ・微小線要素の長さの二乗の変化

微小線要素の長さの二乗に注目して新しい変形の指標を考えた. 線要素の長さの二乗は線要素ベクトル自身の内積で与えられる.

元の線要素の長さをdS, 変形後の長さをdsとしてそれらの二乗の引き算を行う. すると, その差は図中の(1)の式に見るような元の線要素dXの二次形式か, あるいは(2)の式に見るような変形後の線要素dxの二次形式で表すことができる. そして, それら二次形式には, その点近傍での変形状態によって決まる2階のテンソル(行列)が現れる.

□

## 2つの有限ひずみ（Greenのひずみ，Almansiのひずみ）

$$ds^2 - dS^2 = dX \cdot (F^T F - I) dX$$

•（変形前の線素 → 長さ変化）

$$ds^2 - dS^2 = dx \cdot (I - (FF^T)^{-1}) dx$$

•（変形後の線素 → 長さ変化）

→  $\begin{cases} (F^T F - I) \\ (I - (FF^T)^{-1}) \end{cases}$  は内部の1点近傍の伸び縮みの指標にできる！

しかも,  $\begin{cases} F^T F = U^2 = C \\ FF^T = V^2 = b \end{cases}$  だから剛体回転成分の寄与は含んでいない！

（ $C$  : right Cauchy-Green tensor,  $b$  : left Cauchy-Green tensor）

• Green (Lagrange)のひずみ

$$E = \frac{1}{2}(F^T F - I) = \frac{1}{2}(C - I)$$

• Almansi (Euler)のひずみ

$$e = \frac{1}{2}(I - (FF^T)^{-1}) = \frac{1}{2}(I - b^{-1})$$

□

## 2つの有限ひずみ（Greenのひずみ，Almansiのひずみ）

• 剛体的回転の寄与分を除いた変形の指標

微小線要素の長さの二乗の変化分（差）は、変形前の線要素を用いるか、変形後の線要素を用いるか、という2通りの二次形式で表された。それら二次形式に現れる2階のテンソル（行列）は1点での変形を表す変形勾配テンソルFによって与えられている。しかも、調べてみると、図中の式にあるように、いずれにおいてもFの中に含まれていた剛体回転Rが消えている。したがって、これらの2階テンソルは、剛体的な回転による寄与分を除き、純粋に変形だけを表す指標として用いることができる。

これら2階のテンソルに現れる項について、Uの二乗を「right Cauchy-Green tensor」、Vの二乗を「left Cauchy-Green tensor」と呼んでいる。

• Greenのひずみ，Almansiのひずみ

変形前の線要素を用いた二次形式に現れる2階テンソルの半分をGreenのひずみテンソル，変形後の線要素を用いた二次形式中の2階テンソルの半分をAlmansiのひずみテンソルという。これらは変形勾配テンソルと同様、物体が占める領域上のテンソル値関数（テンソル場）を形成する。

□

## 微小ひずみとの比較（２次元の例）

・変位で表すと・・・

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}, \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \begin{cases} x = X + u_x \\ y = Y + u_y \end{cases} \rightarrow \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial X} & \frac{\partial u_x}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial X} & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial Y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} \\ E_{xy} & E_{yy} \end{bmatrix}$$

$$E_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial X} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial X} \right)^2 \right]$$

$$E_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial Y} \right)^2 \right]$$

非線形項

$$E_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial X} \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \frac{\partial u_y}{\partial Y} \right)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

( $\because X \approx x$ )

運動が微小

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

□

## 微小ひずみとの比較

有限ひずみといわれるものは、よく知られている微小ひずみと何が違うのか？それを理解するための例題をひとつ示す。

・変位ベクトルによる表現

微小ひずみテンソルと比較するために変位ベクトルによって表現する。すると、図中の式にみるように有限ひずみテンソルにおいて、

(1) 元の位置ベクトル $\mathbf{X}$ と現在の位置ベクトル $\mathbf{x}$ の違いを「変位が小さい」として無視する。

(2) 変位の導関数の２次の項も「変形が小さい」として無視する。

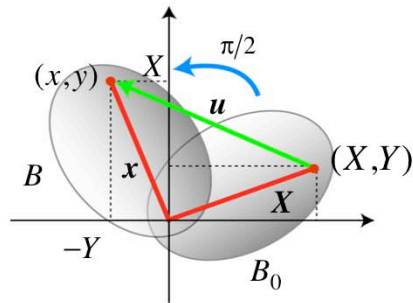
としたものが微小ひずみテンソルであることが良く判る。

では、この２つの単純化により、微小ひずみテンソルは変形指標としての表現能力のいかなる部分を失っているか？

次の具体例を見よう。

□

### (例) 物体の剛体回転 (変形しない)



(剛体回転のみ)

変位: 
$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} -Y \\ X \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_x = -Y - X \\ u_y = X - Y \end{cases}$$

#### ・有限ひずみ (Greenのひずみ)

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} \\ E_{xy} & E_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ ひずみゼロの評価. OK!

#### ・微小ひずみ

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

→ 存在しない「ひずみ」を評価. 不適切!

□

### (例) 物体の剛体回転

#### ・問題の設定

初めに $B_0$ の位置にあった物体が反時計回りに90度回転したとする. 位置は変わるが, 物体に変形は生じていない.

#### ・有限ひずみと微小ひずみ

この運動に対して変位ベクトルを計算し, 有限ひずみテンソルと微小ひずみテンソルを求めてみる. すると, 有限ひずみはゼロとなって変形が生じていないことを教えてくれるのに対し, 微小ひずみテンソルでは存在しない変形 (x,y方向の圧縮ひずみ) を評価してしまう.

この例が示すように, 運動に剛体回転が含まれているときには, 微小ひずみは正しく変形を評価できない.