# 連続体力学

## 基礎理論と数学の道具

東北大学大学院工学研究科土木工学専攻
京 谷 孝 史

# 数学の道具（その1）

・ベクトルとテンソル
・正規直交基底の導入
・数ベクトルと正方行列

## 量のテンソル特性

・スカラー（実数）：大きさのみ．（０階のテンソル）

$\lambda, \mu$　質量，距離，温度，熱量，距離

・矢印ベクトル　：大きさ，方向１つ（１階のテンソル）

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$　変位，速度，加速度，力

・２階テンソル　：大きさ，方向２つ

$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$　応力，ひずみ．

線形変換　$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}$ の作用素　$\boldsymbol{S}$

・n 階テンソル　：大きさ，方向 n

$\boldsymbol{D}$　弾性テンソル（４階テンソル）

量のテンソル特性

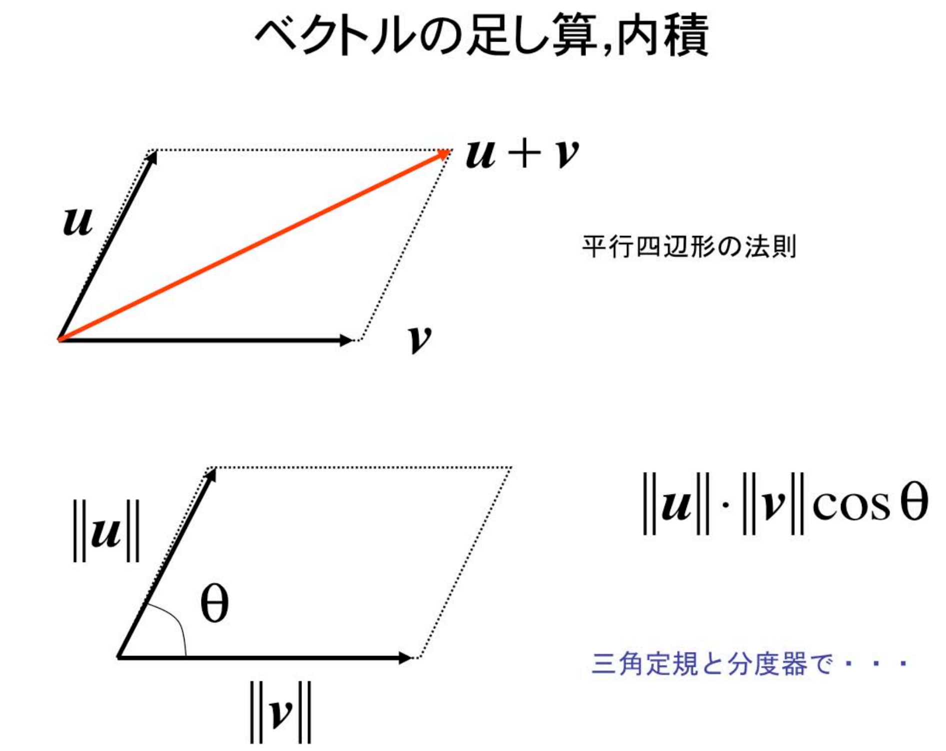
現象の中には様々な量が存在する．それぞれの量は三次元空間における方向への固有の依存性がある．それを量のテンソル特性という．

依存する方向の数をテンソルの階数という．大きさだけを持つ量はゼロ階のテンソルであり，スカラーと呼ばれる．

大きさと一つの方向を属性に持つ量は１階のテンソルである．1階のテンソルは矢印ベクトルで表現できる．

２階のテンソルは大きさに加えて二つの方向に依存する量であり．１階のテンソルの線形変換作用素の意味を持つ量として現れる．応力やひずみは２階テンソルである．

４階のテンソルは大きさと４つの方向に依存する量であり，二階テンソルを二階テンソルに変換する線形作用素の意味を持つ．応力とひずみを結びつける構成則の中に現れる弾性テンソルが４階テンソルである．




ベクトルの足し算，内積

一階のテンソル（矢印ベクトル）の足し算は平行四辺形の法則によって与えられる．また，矢印ベクトル同士の内積は式に見るとおり，長さと余弦の掛け算で定義されている．

これらの演算を行うには三角定規と分度器が必要である．このままでは非常に不便である．

□

# 総和規約

・文字指標 $I, j, k$ ・・・を用いた便利な式操作のルール

（１）指標$I, j, k$ ・・・は数字１，２，３を代表して表し，１，２，３が順不同で入ることができる．

$$a_i + b_i = c_i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a_1 + b_1 = c_1 \\ a_2 + b_2 = c_2 \\ a_3 + b_3 = c_3 \end{cases}$$

（２）同一項の中で同じ指標は二回まで．二回現れる指標には，１，２，３を入れて総和を取る．

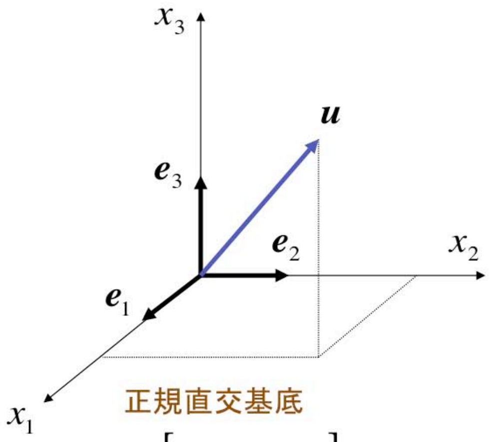
$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

＊自由指標：一回現れる指標，
＊ダミー指標:二回現れて和をとる指標

総和規約

連続体力学の数式を扱うのに必要不可欠な道具が総和規約である．手を動かすことを厭わなければすぐにマスターできる．

# 正規直交基底によるベクトルの表現




正規直交基底
$[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3]$
によるデカルト座標系

・ベクトルは基底の一次結合で

$$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i$$
$$= u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3$$
$$\because u_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}$$

（３つの成分）

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

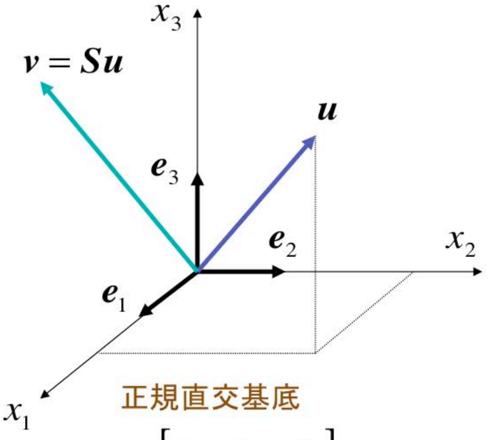
（クロネッカーのデルタ）

正規直交基底によるベクトルの表現

三次元の矢印ベクトルの集合では，互いに独立な三つのベクトルを定めれば全てのベクトルはその三つのベクトルの一次結合で表される．このとき，この基本となる三つのベクトルを基底という．

基底は無限取り選べるが，三つのベクトルが長さが１で互いに直交するとき，正規直交基底という．正規直交基底の内積はクロネッカーのデルタで表される．正規直交基底はひとつの直交直角座標系（デカルト座標系）を定める．

# 正規直交基底による二階テンソルの表現




正規直交基底

$$\left[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\right]$$

によるデカルト座標系

・２階テンソル（線形変換作用素）は基底のテンソル積の一次結合で

$$\boldsymbol{S} = S_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$$
$$= S_{11}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) + S_{12}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2)\cdots$$

$$\because S_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_j$$ （９つの成分）

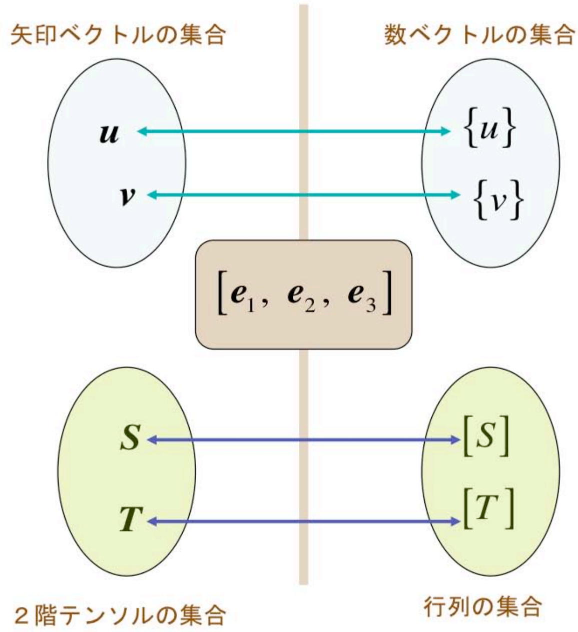
正規直交基底による二階テンソルの表現

二階のテンソルは正規直交基底の９つのテンソル積の一次結合で表される．ベクトルのテンソル積については後述．ここでは，「**二階テンソルは空間の方向の情報を二つ持つ量だから，それを表現する単位は二つの基底ベクトルのテンソル積という特殊な掛け算をした形になっているのだ**」と理解しておいてほしい．

## 数ベクトル,行列との一対一対応

$$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i \;\rightarrow\; u_i \;\rightarrow\; \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S} = S_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \;\rightarrow\; S_{ij} \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$




数ベクトル，行列との一対一対応

正規直交基底を一組固定すると，一つの矢印ベクトルについて３つの成分が定まり，それを縦に並べた３次元数ベクトルと一対一に対応する．また，一つの二階テンソルには９つの成分が定まり，それを並べた正方行列と一対一に対応する．

この対応関係を通して，矢印ベクトルや二階テンソルを，具体的な数量として扱うことができるようになる．

□

## 計算ができる!

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=u_i\boldsymbol{e}_i+v_i\boldsymbol{e}_i=(u_i+v_i)\boldsymbol{e}_i \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{Bmatrix}$$

### ベクトルの内積

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} &= (u_i\boldsymbol{e}_i)\cdot(v_j\boldsymbol{e}_j) \\ &= u_i v_j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j) \\ &= u_i v_j \delta_{ij} \\ &= u_i v_i \\ &= u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &\begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \\ &= u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \end{aligned}$$

計算ができる.

正規直交基底を固定すると，矢印ベクトルの足し算は数ベクトルの足し算を実行すれば実現する．また，内積も成分同士の積和を取れば計算できる．三角定規と分度器はいらなくなる．

ちなみに，どうして正規直交系を選ぶかというと，内積が成分同士の積和になって便利だからというのが理由からである．正規直交基底でない場合にどうなるか，ちょっと考えてみて欲しい．

## ベクトルのテンソル積

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=(a_i\boldsymbol{e}_i)\otimes(b_j\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)$$

$$\to\quad\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}&=[(a_i\boldsymbol{e}_i)\otimes(b_j\boldsymbol{e}_j)](c_k\boldsymbol{e}_k)=a_ib_jc_k(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k\\&=a_ib_jc_k(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_i=a_ib_jc_k\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i=a_ib_jc_j\boldsymbol{e}_i=(a_i\boldsymbol{e}_i)b_jc_j\\&=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

$$\to\quad\left(\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{Bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{Bmatrix}\right)$$

### ベクトルのテンソル積

ベクトルのテンソル積とは，二つのベクトル（一階テンソル）から二階テンソルを作る演算である．出来上がった二階テンソルはベクトルを別のベクトルに写す線形変換作用素になる．

テンソル積の定義式を，正規直交基底を用いて具体的に計算してみる．すると，固定した基底の下で，ベクトルのテンソル積とは「二つのベクトルの成分から正方行列を作る演算である」と見ることが出来る．

そして，定義式そのものは，線形代数で習った三つの行列（数ベクトル）の積における結合則に対応することが判る．

言いたいことは，「ベクトルのテンソル積を定義式のようなものとして導入すると，線形変換作用素としての二階テンソルがうまく表現でき，また線形代数の演算ルールとも調和的であるなど，色んな意味で都合がうまくいく」ということ．そんなものだとして，これに習熟していただきたい．

## 二階テンソルによるベクトルの線形変換

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{u} = \left(S_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\right)(u_k \boldsymbol{e}_k)$$
$$= S_{ij}u_k(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k = S_{ij}u_k(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_i$$
$$= S_{ij}u_k\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i = S_{ij}u_j\boldsymbol{e}_i$$

$$\therefore v_i\boldsymbol{e}_i = S_{ij}u_j\boldsymbol{e}_i \quad \to \quad v_i = S_{ij}u_j$$

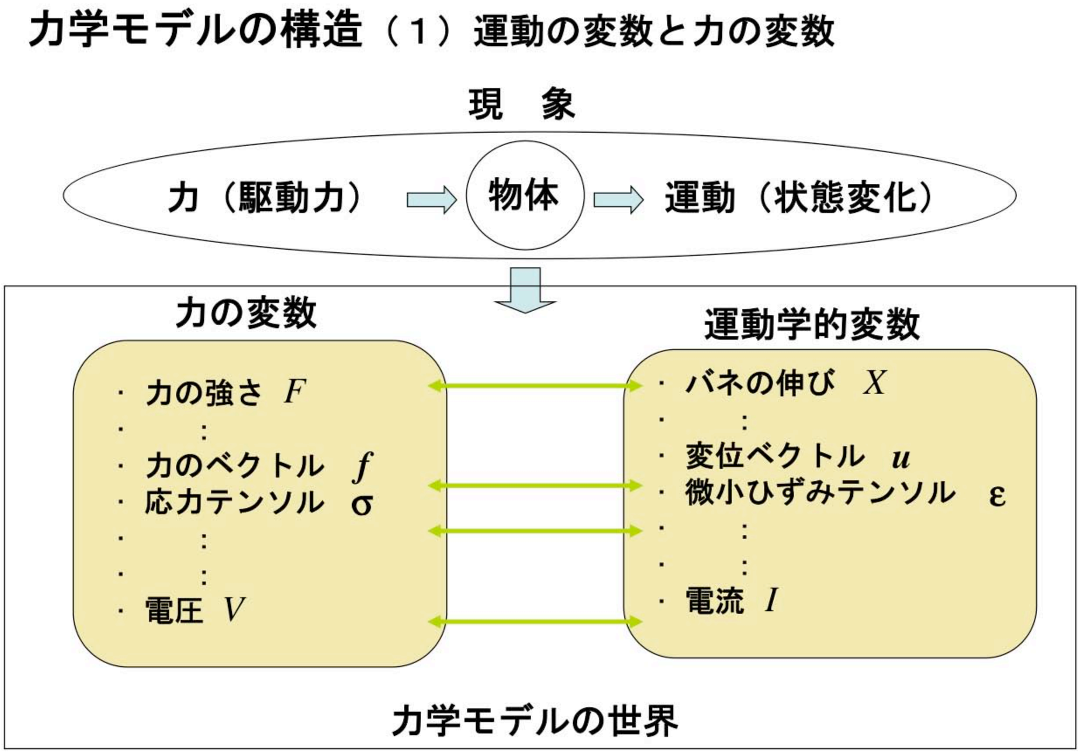
$$\to \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

二階テンソルによるベクトルの線形変換

二階テンソルはベクトルを別のベクトルに写す線形変換作用素になる．テンソル積の定義にしたがって二階テンソルSによるベクトルの線形変換について成分計算ができる．計算の結果は見たとおり，行列による数ベクトルの線形変換と一致する．

# 連続体力学（その1）

・力学モデルの構成
・Cauchyの応力テンソル




## 力学モデルの構造（１）運動学的変数と力の変数

**・力学現象の認識**

我々は現象の主体（物体）の状態が変化（運動）することをまず観察する．そして，その変化は何か（原因）が物体に作用して引き起こされたと考える．火の無い所に煙は立たないという因果律にしたがった素直な認識である．原因のことを現象を引き起こす駆動力（driving force）とも言う．

**・力学モデルへの抽象化，運動の変数と力の変数の選択**

「運動学的変数」：　まず観察した状態の変化（運動）を表すための量を定め，それを記述するための変数を選ぶ．座標を指定すれば点の位置が判るように，その変数を指定すれば物体の状態が判るということから，これらの変数は「一般化座標」と呼ぶことがある．しかし，今は物体の運動（変形）に限るのでそれをここでは「運動の変数」と呼ぶことにする．

「力の変数」　：　状態の変化（運動）を引き起こす原因となっている「何か」を表す量を「力」として定め，それを記述する変数を選ぶ．これを「一般化座標」に呼応して「一般化力」と呼ぶことがある．しかし，ここでは「力の変数」と呼ぶことにする．

**・「運動の変数」と「力の変数」は同じテンソル特性**

「大きさ」だけに注目した量をスカラーあるいは０階のテンソルという．体重や温度などである．「大きさ＆一つの方向」の情報を含む量をベクトルあるいは１階のテンソルという．高校の物理で習う速度や加速度がそうである．応力やひずみは２階のテンソル量であり「大きさ＆２つの方向」の情報を含んでいる．ｎ階のテンソルは「大きさ＆ｎ個の方向」の情報を含む量をいう．これらは現象に表れる量の本質的な特性であり，量の「テンソル特性」と言われる．

力学モデルにおいては，「運動学的変数」と「力の変数」にはテンソル特性が同じ量が対になるように選ばれている．

## （キーポイント）

- 対応する運動の変数と力の変数は量としてのテンソル特性が同じ
- かけ算（内積）した結果はスカラー．仕事量（エネルギー）の意味を持つ

•スカラー　（仕事）　$W = FX$

•ベクトル　（仕事）

$$W = \{f_1 \quad f_2 \quad f_3\}^t \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\} = f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3$$

•２階テンソル（仕事）

$$W = \mathrm{tr}\left([\sigma]^t [\varepsilon]\right) = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} + 2\sigma_{23}\varepsilon_{23} + 2\sigma_{31}\varepsilon_{31}$$

・仕事あるいはエネルギー：「力の変数」と「運動の変数」のかけ算（内積）

数学の世界においてはテンソルの階数に応じた「かけ算（内積）」が定義されている．「内積」は階数が同じ２つのテンソルからスカラー量を生み出す何らかの演算である．対応する力の変数と運動の変数はテンソル特性が同じなので，それらの「内積」を求めることが出来る．それが物理の世界に戻した時に「仕事」を表すスカラー量になっている．数学と物理のなんと美しい調和であろうか．

「運動の変数」と「力の変数」をそのように選んだというよりは，注意深く自然を観察したらそのようになっていた，と言った方がよい．古来，天才達は力学のこういう部分に「神」を感じたそうな．

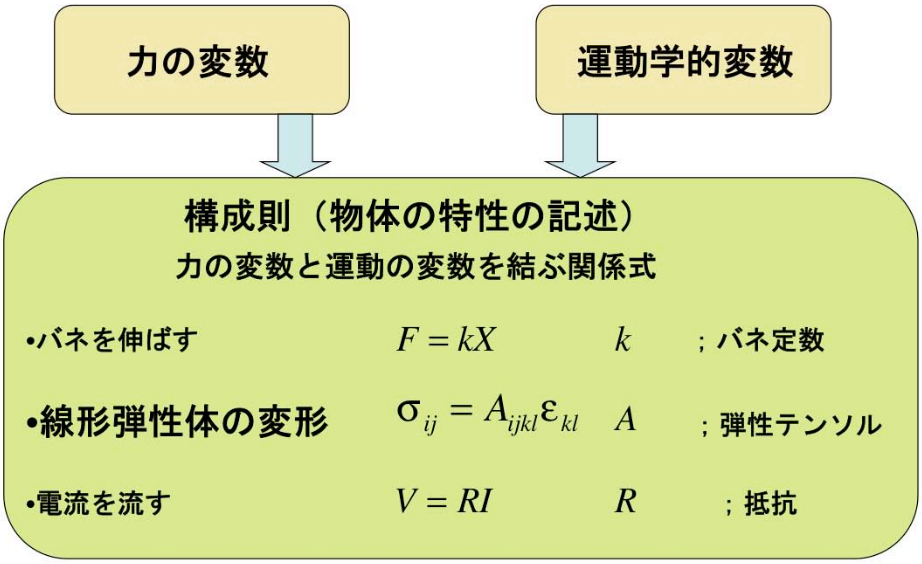
・「内積」とは？

ある集合において，その中の任意の２つの要素から実数を作り出す演算があって，その演算が内積公理と呼ばれる簡単なルールを満たすとき，その集合における内積という．内積は無数に考えることができる．高校の教科書で習った「矢印ベクトルの内積」だけが内積ではないことに注意．

内積を一つ決めると，それに基づいて要素の「大きさ」や要素間の「距離」が定義できる．また，内積はシュワルツの不等式を満たすので，要素間の角度も定義できる．特に，大きさがゼロでない２つの要素の内積がゼロになるとき，２つの要素は「直交」しているという．これら「大きさ」，「距離」「角度」は，定規や分度器で測れるような具体的なものである必要ではない．「直交」とは「内積がゼロ」を意味するのみである．分度器で測った角度が直角であることを意味しない．

高校で習う矢印ベクトルの集合とその内積だけが生活の中で定規や分度器で測っている「大きさ」と「角度」と直結している．矢印ベクトルとは全く異なる別の量の集合があって，そこに何らかの内積が定義されているときには，その集合における「大きさ」，「距離」，「直交」などは抽象的なもので，もはや定規や分度器では測れない．しかし，内積が違うだけで集合の数学的な構造は完全に同じなので，矢印ベクトルの集合の場合と全く同じに考えて良い．内積が与えてくれるそうした構造を理解することが大事である．

# 力学モデルの構造（２）構成則の位置づけ




＊）力学モデルの中では物体は構成則に現れる物性値に抽象化

力学モデルの構造（２）構成則の位置付け

・構成則とは？

「力の変数」と「運動の変数」を準備しただけでは力学モデルは完成しない．現象の主体である肝心の物体については未だ何も記述されていないからである．

ある現象「（原因）→ <<物体>> →（結果）」において，（原因）に対する（結果）の現れ方は物体の性質に依存する．例えば，力が加えられた時，大きく変形するか少ししか変形しないかは，その物体の「かたさ」といったような性質に依存するいうことである．この性質，すなわち「力の変数」と「運動の変数」がどのように関係するかは，数式で記述することによってモデル化される．この数学モデルを構成則（構成式）という．

・構成則の役割と位置付け

力学モデルは，「力の変数」と「運動学的変数」，そして「構成則」の３つの道具が揃ってはじめて現象「（原因）→ <<物体>> →（結果）」を記述することができる．

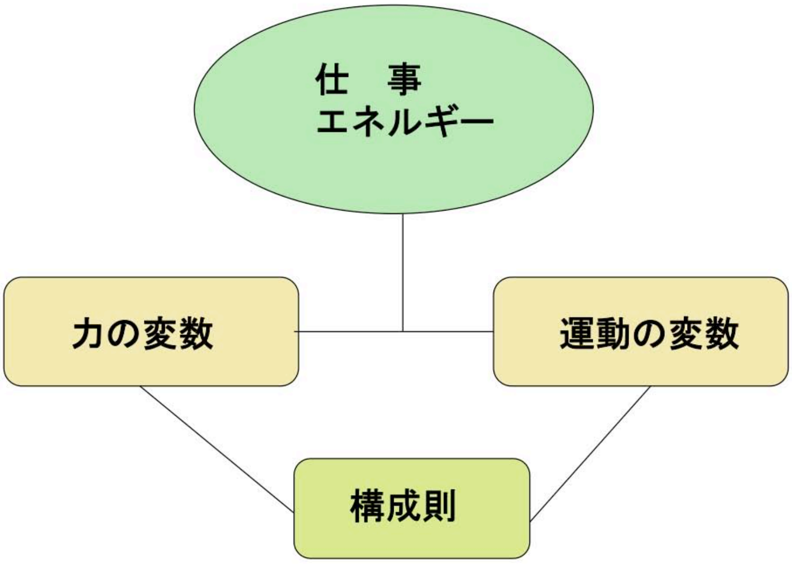
・構成則に表現された物体（現象の主体）

力学モデルの世界では，物体は必要最小限の特性だけが注目されて構成則の中に現れる．例えば，バネを伸ばすという現象において，バネの特性を表す構成則は F=kX であり，k という比例定数１つがバネの全てを表すことになる．電流を流すという現象もしかり．物体は抵抗 R として表現される．物体の材質や形，色がどうであったかは問われない．

・物性値，物性パラメータ

構成則にはこのような物体の特性を示すパラメータが必ず含まれている（当然 !!）．これを物性値とか，物性パラメータなどと呼んでいる．それは材料試験によって決定される．

## 力学モデルの構造（まとめ）




力学モデルの構造まとめ

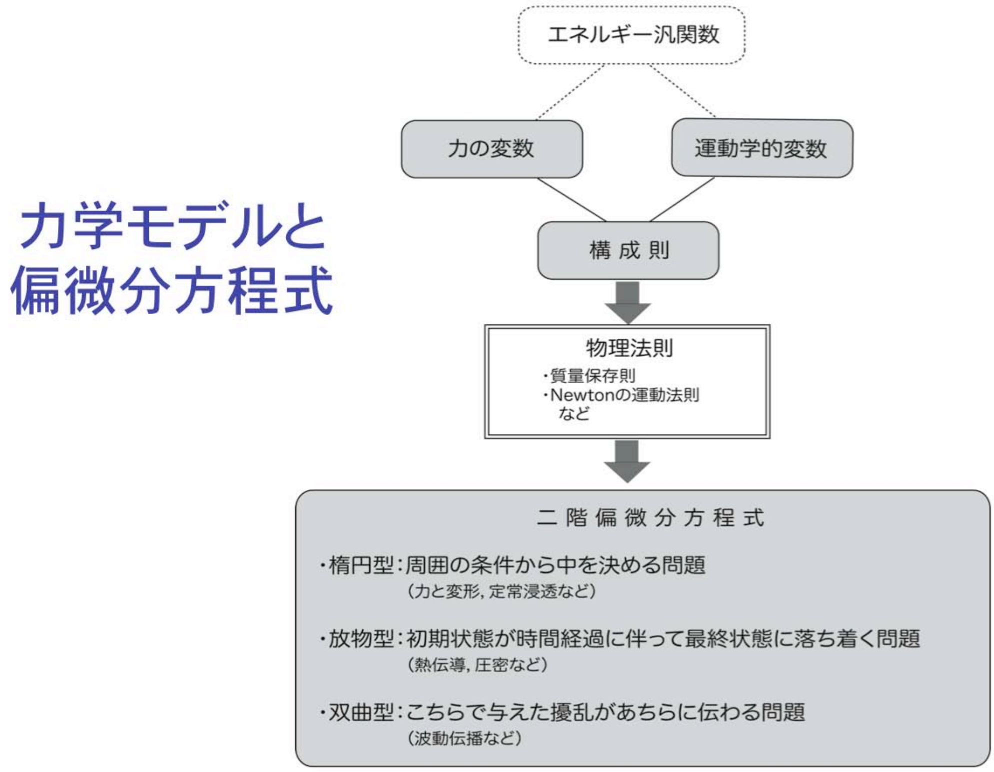
・力学モデルの構成要素

「力の変数」と「運動の変数」，およびそれらを結びつける「構成則」からなる．

・仕事，エネルギー

「力の変数」と「運動の変数」はテンソル特性が同じであり，テンソルのオーダーに応じて「かけ算（内積）」が定義されている．

この「かけ算（内積）」の結果はスカラー（実数）となるが，それは物理的には仕事（エネルギー）の意味を持つ量となる．

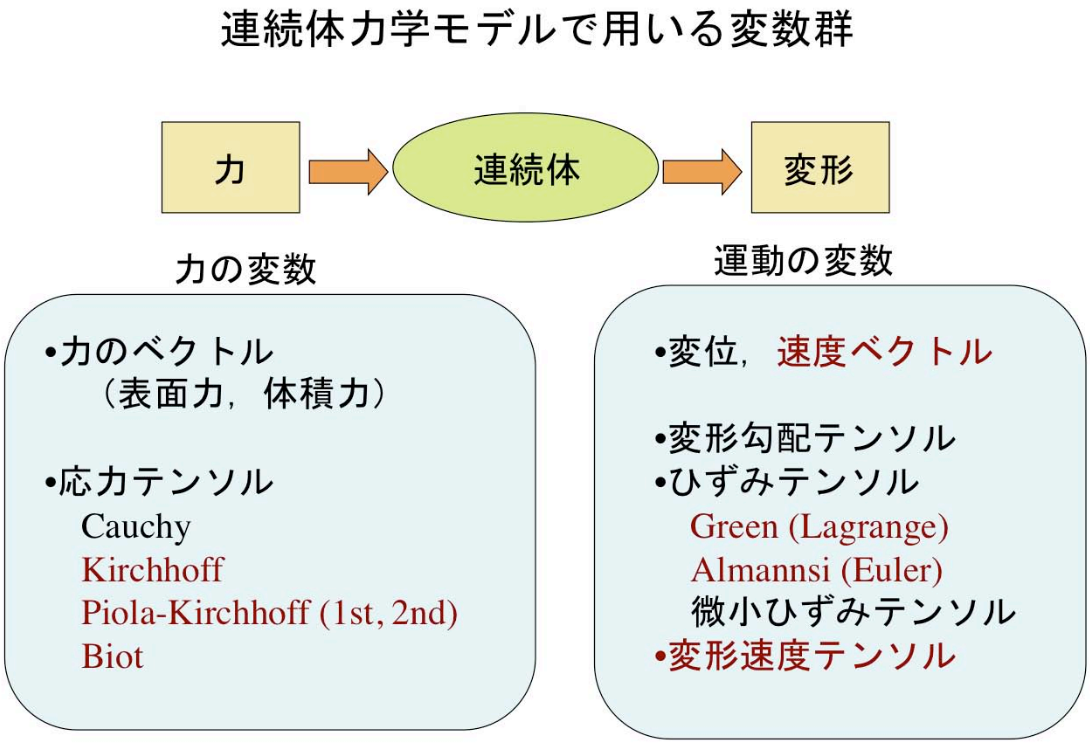



## 力学モデルと偏微分方程式

対象とする力学の問題について，力の変数，運動学的変数，そして，それらを結ぶ構成則の３つを，力学の憲法とも呼ぶべき質量保存則，Newtonの運動法則，エネルギー保存則などの枠組みに放り込んでお決まりの式展開を施すと，我々が対象とする力学の問題は，楕円型，放物型，双曲型の三種類の二階偏微分方程式のうち，どれか一つの初期値・境界値問題というコンパクトな形になって現れる．

二階偏微分方程式なので，与えられる境界条件としては未知関数そのものの値が与えられる境界（ディリクレ境界）と，一階導関数の値が与えられる境界（ノイマン境界）の二種類がある．それぞれの境界条件は与えられた問題に応じた様々な物理量に対応する．

楕円型は，周囲の境界条件が与えられたときに，領域内部の状態を決める問題に対応する．力と変形の問題や定常浸透流（熱伝導）の問題などが代表的である．放物型は，初期の状態が時間経過に伴って最終状態に落ち着く様子の問題に対応する．熱伝導や地盤の圧密が代表的である．双曲型は，擾乱が時間経過とともに空間を伝わっていく問題に対応する．波動伝播の問題が代表的である．




連続体力学モデルの変数群

・物体の連続体としての理想化

現実の物体は分子の集まりで出来ていて，電子顕微鏡で見るとスカスカで穴だらけの構造をしている．これを力学の世界でこれを扱うために，３次元空間内の連続な領域「連続体」として理想化する．「運動の変数」，「力の変数」さらには「物性値」などはこの領域上の関数として定義される．これらの関数が定義される舞台（定義域）として，物体が連続な領域であることが必要なのである．この「物体が占める連続領域」を（configuration）といい，日本語の教科書では「配置」とか「標構」などと翻訳されている．

・運動の変数

連続体が変形（運動）すれば内部の各点は移動する．これを記述するには移動量と向きを同時に表す必要があるのでベクトル（１階テンソル）が用いられる．これを変位ベクトルと呼ぶ．変形（運動）の速度を問題にするならば，同様に考えて各点の移動速度をベクトルで表現する．これを速度ベクトルという．連続体内部の変形状態を表すには大きさと２つの方向を用いた変形勾配テンソル，ひずみテンソルと呼ばれる２階のテンソルが用いられる．変形の様子を変形前を基準に見るか，変形後を基準にみるかによって，ひずみテンソルには基本的に２種類のテンソルがある．変形速度が問題となるときには変形速度テンソルが用いられる．

・力の変数

変位ベクトルや速度ベクトルを引き起こす外力はやはり大きさと向きが問題となる量であり，ベクトルによって表す．外力には物体の表面に触れて作用する力「近接作用力」と重力のように物体には直接触れずに作用する力「遠隔作用力」がある．これをそれぞれ表面力ベクトル，体積力ベクトルという．連続体内部の変形（ひずみテンソル，変形勾配テンソル）を引き起こすのは連続体内部に分布する「力」である．この内部に分布する力は，やはり２階テンソルで記述できることがCauchyによって発見された．これをCauchyの応力テンソルという．Cauchy応力テンソルを基本として，何通りか応力テンソルが定義されている．

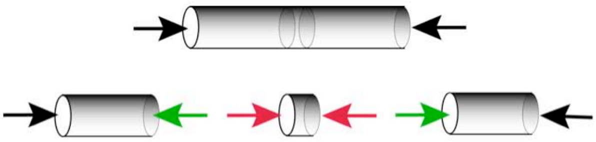
・スカラー場，ベクトル場，テンソル場

連続体力学で用いるこれらの変数は物体が占める３次元領域上の関数（場）になる．３次元領域に何かスカラー値（数字）がビッシリと書き込んである状態をスカラー場という．数字の代わりにベクトルがビッシリと書き込んであるのがベクトル場，テンソルが書き込んである状態がテンソル場である．連続体力学でやっかいなのは，これらの関数値（場）が時間と共に変化するだけでなく，関数の定義域が変化する（物体が運動・変形する）ことにある．

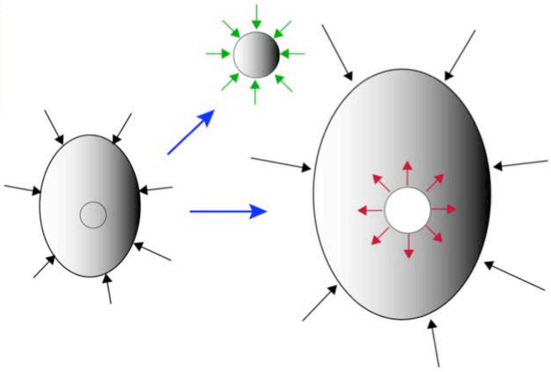
力がつり合っている物体では・・・

→ 任意の部分でも力はつり合っている.

・力の合計がゼロ
・力のモーメントの合計がゼロ



（棒とその任意の部分）



（連続体とその任意の部分）

どんどん小さくなる部分を考える → 点に作用する力の状態は？

力がつり合っている物体とその任意の部分のつり合い

・任意の部分もつり合っている

ある物体に力が作用してつり合っているとき，物体は静止（あるいは等速度運動）している．その任意の部分に注目したとき，当然のことながらその部分も全体と一緒に静止している・・・ということは，その任意の部分に作用する力もつり合っているはずである．

・材料力学あるいは構造力学を思い出せば・・・

材料力学，構造力学と呼ばれる授業では，この「部分のつり合い」を根拠に，部分を仮想的に切り出して，そこに作用する未知の部材力（断面力）を含む力のつり合い式を立て，それを解いて必要な部材力を求めることを習う．それらの授業では，扱う構造部材の形が棒や板などの決まった形であり，切り出した任意の部分（断面）に作用している部材力（断面力）は，軸力，曲げモーメント，せん断力，トルクなどであると教えられる．

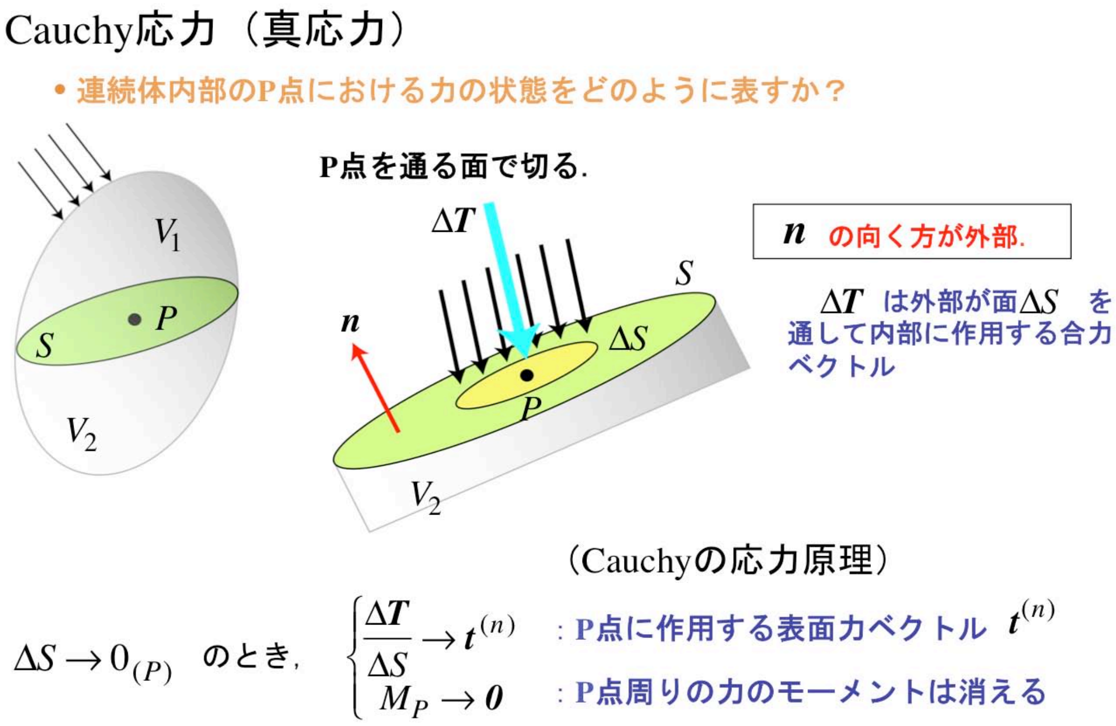
では，連続体の任意の部分（断面）に作用する力はどのようなものか？

・連続体内部の「力」の表現

そのような「力」は物体内部に分布する量であり，物体が占める領域上に定義された関数（場）として表現されるべきものである．それを考えるためには，物体内部において力のつり合いを考える任意部分をどんどん小さくしていって，点に作用する力なるのもを考えればよいであろう．それが判れば，材料力学や構造力学のように，それを未知力（関数，場）とした力のつり合い式を立てて解くという手順が適用できる．

・Cauchyによる応力の発見

さて，そのような連続体内部の任意の１点に作用する力はどのように表すことができるのか？その答えはコーシー（Cauchy）によって見出されたのである．




Cauchy応力（真応力）

・Cauchyの応力原理

Cauchy は1点Pに作用する力を考えるために，まず，Pを通る面で物体を切ることを考えた．

今，あるひとつのPを通る面で物体を切り，注目する方の部分をV2，残ったもう一方の部分をV1と呼ぶことにする．注目しているV2側は面の内部，V1側は面の外部ともいう．外部であるV1はこの面を介してV2に力を及ぼしている．この力は大きさと向きがあるベクトルであり，それは面上に分布するベクトルである．

今，Pの周囲に微小な面積△Sと，そこに作用する分布力を考える．この状態では：

（１）面積△Sに作用する分布力ベクトルの合力ベクトルが求められる．それを△Tとする．

（２）分布力ベクトルは微小面△S上に適当な大きさで分布するからP点を指で支えると△Sは回転してしまう．すなわち，分布力ベクトルによるP点回りの力のモーメントMpはゼロではない．

この状態からP点に作用する力を考えるために， △S → ０として面を点Pに収束させたら上記のことはどうなるだろうか？

Cauchyはここで，合力ベクトルを面積で除した値△T/△Sが一定のベクトル $t^{(n)}$ に収束すること，および△S → ０に伴って分布力によるP点回りのモーメントMpが消えると考えた．このベクトル $t^{(n)}$のことを表面力ベクトル（traction vector）と呼ぶ．すなわち， Cauchyは

（１）一つの面を特定したときに点Pに作用する力として表面力ベクトル$t^{(n)}$が決まること，

（２）点Pを回転させるような力のモーメントは考えなくて良いこと

を主張したのである．これをCauchyの応力原理という．証明はできないけれど誰もが「イギナシ！」ということを原理と呼ぶ．

・面の方向，外向き単位法線ベクトル

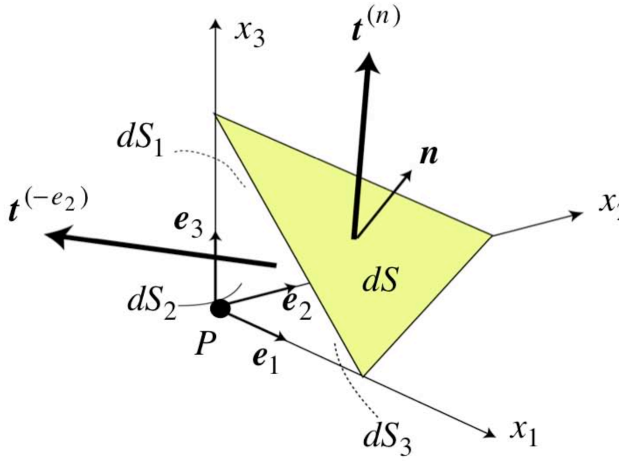
３次元空間に浮かぶ面の向きを決めるために，面に垂直な単位ベクトル「単位法線ベクトル」を指定する．そのとき単位法線ベクトルは必ず「外側」を向くものと約束する．単位法線ベクトルが向いている方が面で隔てられた「外部」，その反対が「内部」である．これは単純ではあるが連続体の力学の極めて重要な基本的ルールである．

しかし，$\boldsymbol{t}^{(n)}$は切る面で異なる． P点を通る面は無限通り選べる.

→　$\boldsymbol{t}^{(n)}$だけではP点の力の状態を一意に表せない・・・・

→　通る座標軸に垂直な３つの面で切ってみよう！！

→　３つの表面力ベクトル $\boldsymbol{t}^{(e_1)}$, $\boldsymbol{t}^{(e_2)}$, $\boldsymbol{t}^{(e_3)}$ ではどうか？




（作用・反作用）

$$\boldsymbol{t}^{(-e_1)} = -\boldsymbol{t}^{(e_1)}$$
$$\boldsymbol{t}^{(-e_2)} = -\boldsymbol{t}^{(e_2)}$$
$$\boldsymbol{t}^{(-e_3)} = -\boldsymbol{t}^{(e_3)}$$

（面の射影面積）

$$dS_1 = dS(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1) = n_1 dS$$
$$dS_2 = dS(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2) = n_2 dS$$
$$dS_3 = dS(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1) = n_3 dS$$

２階テンソルによる力の表現（Cauchyの卓抜したアイデア，微小四面体のつり合い）

・$t^{(n)}$は切る面ごとに変わる，しかも面の選び方は無限通り

P点に作用する表面力ベクトル$t^{(n)}$は切る面に依存して変化する（だから添え字にnを付けている）．そして，点Pを通る面は無限通りある．ということは， P点に作用する表面力ベクトル$t^{(n)}$は無限通りあることになり，P点の力の状態を表す量としては適当でない.

・点Pの近傍での微小四面体の切り出し

表面力ベクトル$t^{(n)}$だけではうまくいかないので，P点の近傍において直交座標軸に垂直な３つ面でも切って，単位法線ベクトルnの面と合わせて微小な四面体を切り出す.

・微小四面体の各面の外向き法線ベクトルと面積

外向き単位法線ベクトルnをもつ面の面積をdS，座標軸$x_1$，$x_2$，$x_3$に垂直な面の面積を$dS_1$，$dS_2$，$dS_3$とする．座標軸に垂直な面の外向き単位法線ベクトルはそれぞれ$-e_1$，$-e_2$，$-e_3$である（面の内側は微小四面体の内部）．微小四面体の４つの面はその単位法線ベクトルで識別される．

・座標軸に垂直な面上に作用する表面力ベクトルと作用・反作用の関係にある表面力ベクトル

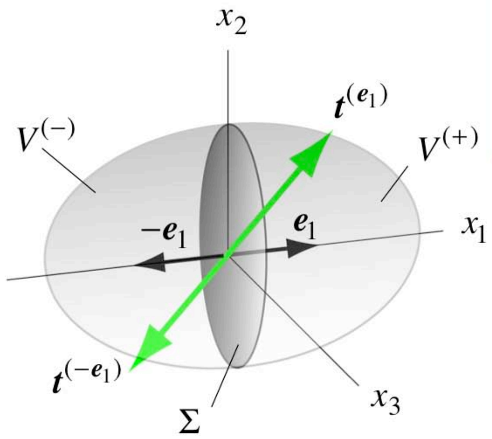
座標軸に垂直な面を介して「外部」がP点近傍の微小四面体の「内部」に作用する表面力ベクトルを$t^{(-e1)}$, $t^{(-e2)}$, $t^{(-e3)}$と表す．例えば，$t^{(-e2)}$は「$-e_2$によって示される外部が， $-e_2$面を介して内部に作用する表面力ベクトル」である．

この表面力ベクトル$t^{(-e2)}$とこの面を介して作用・反作用の関係にあるのは，この面の内側が外側に作用する表面力$t^{(e2)}$である．すなわち，「$e_2$によって示される外部（ $-e_2$から見れば内部，すなわち四面体の内側）が，$e_2$面（$-e_2$面と同じ）を介して内部（$-e_2$から見れば外部，すなわち四面体の外側）に作用する表面力ベクトル」である．したがって，作用・反作用の関係から $t^{(-e2)} = -t^{(e2)}$ が成り立つ．同様にして $t^{(-e1)} = -t^{(e1)}$， $t^{(-e3)} = -t^{(e3)}$． （次の説明図を参照）

・面の射影面積，dSと$dS_1$， $dS_2$，$dS_3$の関係

単純だが重要な関係式．この図的イメージがあれば重要な「ガウスの発散定理」は簡単に理解できる．

## 作用・反作用の関係にある表面力ベクトル




$V^{(+)}$と $V^{(-)}$ は面 $\Sigma$ を介して
互いを引っ張り合っている

$e_1, -e_1$ は両方とも面 $\Sigma$ の単位法線ベクトル

$\Sigma$ の外向き単位法線ベクトルを：

$e_1$ とすれば $V^{(+)}$ が外部の物体

$-e_1$ とすれば $V^{(-)}$ が外部の物体

$t^{(-e_1)}$ は外部の $V^{(-)}$ が内部の $V^{(+)}$ に作用する(今は引張っている)表面力ベクトル

$t^{(e_1)}$ は外部の $V^{(+)}$ が内部の $V^{(-)}$ に作用する(今は引張っている)表面力ベクトル

作用 $t^{(-e_1)}$ と反作用 $t^{(e_1)}$ の関係

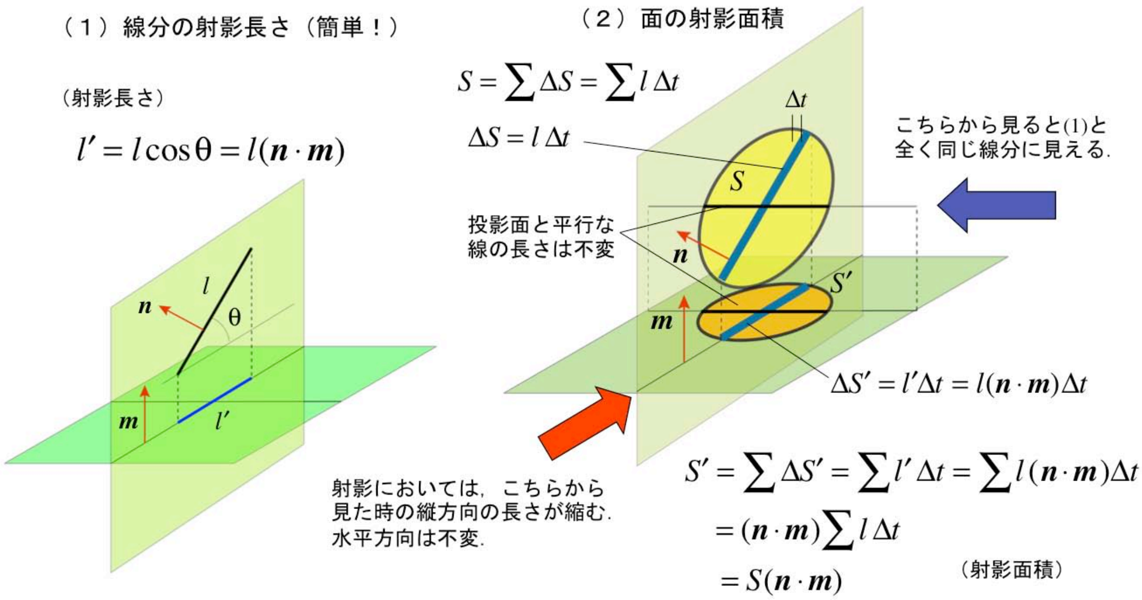
$$t^{(-e_1)} = -t^{(e_1)}$$

作用・反作用の関係にある表面ベクトル

力がつり合っている物体を仮想的な面で切って考えれば，面の表と裏に分けられた２つの部分は，面を介して互いに力を及ぼし合っていることになる．その互いに及ぼし合っている力のベクトルは，大きさが等しく反対向きの「作用・反作用」の関係にある．どちらを「作用」「反作用」と呼ぶかは任意．左右の手を合わせて押し合うことを想像すればよい．

このとき，２つの物体の一方を「考察の対象」とし，他方をその対象に表面力を加えている（作用させている）「外部」として区別するのが「外向き単位法線ベクトル」の役目である．

# 面の射影面積の公式（図的理解）




面の射影面積の公式

・線分の射影長さ

線分の射影長さは図の（１）に見るとおり，

（射影長さ）＝（元の長さ）×（「線分」と「投影面」の単位法線ベクトル同士の内積）

になることはみんな知っている．

・面の射影面積

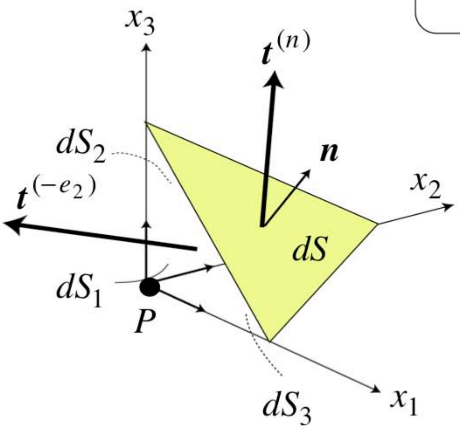
図のように浮かんでいる面を射影することを考える．浮かんでいる面内にあって投影面に平行な線分の長さは不変であり，その長さ不変の方向に直交する線分が（１）と同じルールで縮む．したがって，面を不変方向に垂直に無数の細い短冊に分割すれば，短冊の射影において幅は不変で長さが線分と同じ（１）のルールで縮んでいることになる．したがって，射影面積は

（射影面積）＝（元の面積）×（「面」と「投影面」の単位法線ベクトル同士の内積）

になることは容易に理解できる．

# P点近傍の微小四面体のつり合い

**＊つり合っている物体では任意の部分もつり合っている.**




$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{0} &= \boldsymbol{t}^{(-e_1)}dS_1+\boldsymbol{t}^{(-e_2)}dS_2+\boldsymbol{t}^{(-e_3)}dS_3\\ &\quad+\boldsymbol{t}^{(n)}dS+\rho \boldsymbol{g}dV\end{aligned}}$$

$$\because\ \boldsymbol{t}^{(-e_k)}dS_k=-\boldsymbol{t}^{(e_k)}n_k dS\quad (k=1,2,3)$$

$$\boxed{\boldsymbol{t}^{(n)}+\rho\boldsymbol{g}\frac{dV}{dS}=\boldsymbol{t}^{(e_1)}n_1+\boldsymbol{t}^{(e_2)}n_2+\boldsymbol{t}^{(e_3)}n_3}$$

$dV, dS\to 0$ のとき $\dfrac{dV}{dS}\to 0$

$$\boxed{\therefore\quad \boldsymbol{t}^{(n)}=\boldsymbol{t}^{(e_1)}n_1+\boldsymbol{t}^{(e_2)}n_2+\boldsymbol{t}^{(e_3)}n_3}$$

**P点近傍の微小四面体の力のつり合い**

**・微小四面体に作用する力**

力を受けて静止している物体では，その内部の任意の部分でも力はつり合っていなければならない．P点近傍の微小四面体は４つの面を介して外部から表面力を受けている．各面は微小だから，面上に分布する表面力ベクトルは一定であるとしても差し支えはない．したがって，それぞれの面に作用する表面力ベクトルの合力は，式に見るように（**面上一定の表面力ベクトル**）×（**作用面積**）と表される．すなわち，$t^{(-e1)}dS_1$〜$t^{(-e3)}dS_3$，および$t^{(n)}dS$がそうである．また，重力加速度ベクトルをg，材料の密度をr，微小四面体の体積をdVとすれば，微小四面体に作用する重力はrdVとなる．これらの力がつり合っているのだから，それらのベクトル和はゼロである．

**・射影面積の公式，表面力の作用・反作用の関係の利用**

微小四面体の$x_2$面に垂直な面の面積は$dS_2$であるが，これは nを外向き単位法線ベクトルに持つ面（面積dS）の$x_2$軸に垂直な平面（$x_1$軸と$x_3$軸が作る平面．$x_2$面と呼ぶ）への射影である．したがって，ベクトルnの成分を $n=(n_1,n_2,n_3)$ として，$dS_2 = dS(n\cdot e_2) = n_2\, dS$ が成立することが判る($dS_1$と$dS_3$も同様)．

また，表面力ベクトルの作用・反作用の関係から$t^{(-e2)} = -t^{(e2)}$ ($t^{(-e3)}$と$t^{(-e3)}$も同様)が成り立つことは先に見たとおり．

以上の２つのことを同時に表すには，kを用いて$t^{(-ek)}dS_k = -t^{(ek)}n_k dS$ (k=1,2,3) とすればよい．こうした書き換えを施し，表面力に共通な dS で全体を割算すると真ん中の四角で囲まれた式を得る．

**・点Pにおいて成立する力の関係式が欲しい・・・・**

だから，真ん中の四角で囲まれたつり合い式について，微小四面体がどんどん小さくなって点Pに収束する極限を考える．このとき，体積dVは（したがって表面の面積dSも）ゼロに近づくのだが，体積は長さの３乗，面積は２乗なので，体積dVの方が面積dSよりも速くゼロに近づく．したがって，式中のdV/dSはゼロに収束する．こうして，点Pにおいて成立する式として最後の四角で囲んだ式を得る．

**・問題は「１点Pに作用する力の記述」．最後の式が示していること．**

最後の式は，面の切り方は無限通りあろうとも，$t^{(e1)}$，$t^{(e2)}$，$t^{(e3)}$の３つの表面力ベクトルさえ調べておけば，単位法線ベクトルnの面に作用する$t^{(n)}$は全て$t^{(e1)}$，$t^{(e2)}$，$t^{(e3)}$の線形和で与えられるということを示している．しかもその係数は知りたい面の単位法線ベクトルの成分になっている．・・・ということは，３つの表面力ベクトル $t^{(e1)}$，$t^{(e2)}$，$t^{(e3)}$がP点の力を表していると言って良いだろう，というのがここの結論．

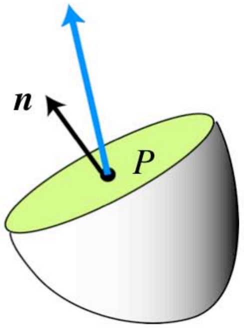
## Cauchyの応力テンソル

$$\boldsymbol{t}^{(n)} = \boldsymbol{t}^{(e_1)} n_1 + \boldsymbol{t}^{(e_2)} n_2 + \boldsymbol{t}^{(e_3)} n_3 = \begin{bmatrix} t_1^{(1)} & t_1^{(2)} & t_1^{(3)} \\ t_2^{(1)} & t_2^{(2)} & t_2^{(3)} \\ t_2^{(1)} & t_2^{(2)} & t_3^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

$$= [\sigma]\{n\}$$

$$= \boldsymbol{\sigma n}$$

**σ が判ればP点を通る任意の面上に作用する表面力ベクトル $\boldsymbol{t}^{(n)}$ が判る.**




$$\boldsymbol{n} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma n}$$

**σ こそ１点の力の状態を表す指標に相応しいではないか！！**

Cauchyの応力テンソル

・前ページの最後の四角で囲んだ式を見やすく書き換える

「単位法線ベクトルnの面に作用する$t^{(n)}$は全て$t^{(e1)}$，$t^{(e2)}$，$t^{(e3)}$の線形和で与えられる．しかもその係数は知りたい面の単位法線ベクトルの成分になっている．」という式を行列表記で書いてみる．すると，点Pを通る外向き法線ベクトルnの面については「 **$t^{(e1)}$，$t^{(e2)}$，$t^{(e3)}$の成分を縦に並べた３×３正方行列によってベクトルnを変換すれば作用している表面力ベクトル$t^{(n)}$が判る**」と読める．

・ Cauchyの応力テンソル

この「 **$t^{(e1)}$，$t^{(e2)}$，$t^{(e3)}$の成分を縦に並べた３×３正方行列**」をsで表しCauchyの応力テンソルと呼ぶ．　１点においてこのsが判れば，その点を通る任意の面上に作用する表面力ベクトルが判るのだから，この正方行列で表される量こそ１点の力を表すのに相応しい．

・ ２階のテンソル

この量は「切る面の方向」とその面に作用する「力の方向」の２つの方向を含んでいるので２階のテンソル量である．だから３×３正方行列で表される．これ以降は，２階のテンソルと３×３正方行列を同一視する．

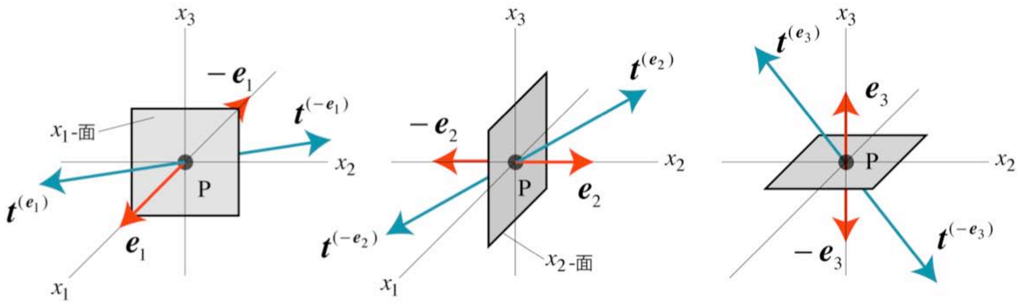
・Cauchyの式

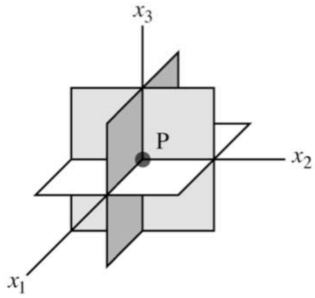
図中の四角で囲んだ式をCauchyの式という．Cauchyの応力テンソルは**面の外向き法線ベクトルnをその面に作用する表面力ベクトル$t^{(n)}$に変換する線形変換作用素**であるという言い方もできる．

・Cauchy応力テンソルの定義に関する注意

連続体力学の古典的な教科書（ Eringen など）では，上の[s]を$[s]^T$と定義してCauchy応力テンソルを導入している．これは成分$s_{ij}$について「 i-面に作用する j-方向の力の成分」として先に物理的意味合い与えたことを大事にしたために，上の行列を$[s]^T$と定義することになったと推測できる（ただし，未確認）．しかし，新しい教科書，特に非線形数値解析を意識して書かれている教科書では，上の説明と同じ定義を用いている．ここでは，次に述べる対称性を踏まえれば結局は同じことなので，より理解しやすいと思われる上のような説明にしている．

## Cauchy応力テンソルの成分の意味（その１）




$$\boldsymbol{t}^{(\boldsymbol{e}_1)} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{t}^{(-\boldsymbol{e}_1)} = \boldsymbol{\sigma}(-\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{21} \\ -\sigma_{31} \end{Bmatrix} = -\boldsymbol{t}^{(\boldsymbol{e}_1)}$$

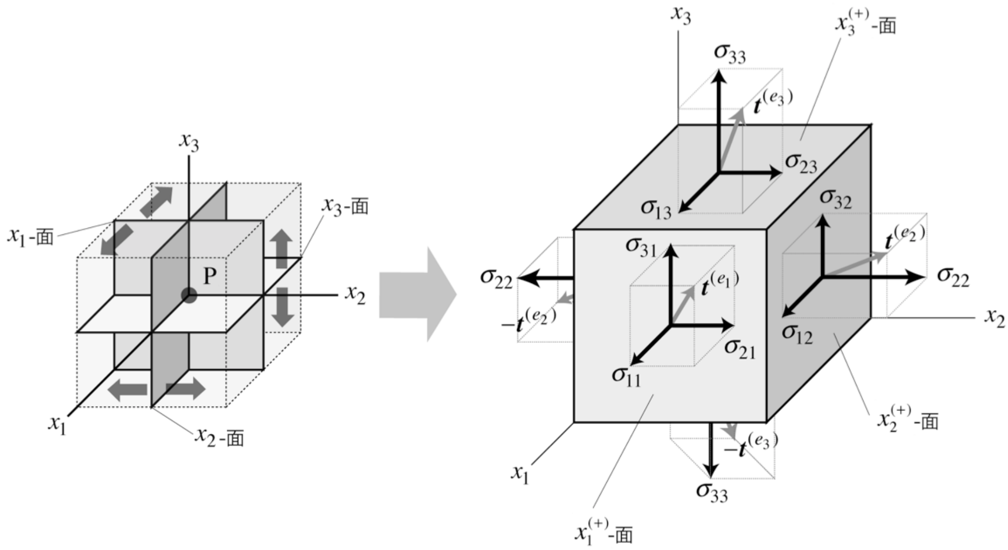
Cauchy応力テンソルの成分の意味（その１）

Cauchy応力テンソルは正規直交座標のもとでそれは三次正方行列で表現される.

Cauchyの式を用いてP点を通る三つの座標面で切って，それぞれの面上でP点に働く表面力ベクトルを求めてみる.

すると，「**Cauchy応力テンソルの各列は，それぞれの座標面に働く一組の作用・反作用の関係にある表面力ベクトルを決めている**」ことが判る.

# Cauchy応力テンソルの成分の意味（その２）



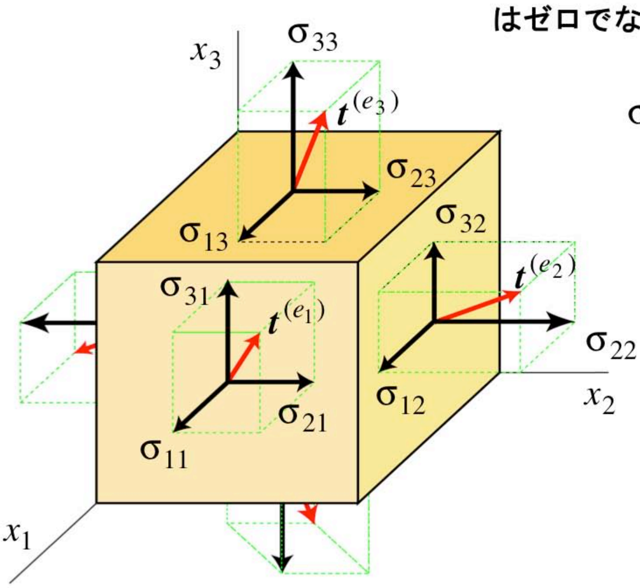

Cauchy応力テンソルの成分の意味（その２）

三つの面上の表面力ベクトルを同時に描くとゴチャゴチャになってしまうので，三つの面の表と裏をはがすようにして六面体を作る．この六面体は向かい合う面は一つの面の裏表であり体積はゼロであることに注意．その6つの面に互いに作用・反作用の関係にある三組の表面力ベクトルの成分を記入する．

Cauchy応力の対角成分は三つの面の両側から面に垂直に作用している力の状態を表し，対角成分が正のときは両側が互いに引っ張りあっている状態，負のときは逆に押し合っている状態を表すことが判る．

また，非対角成分は正のときが面を挟んで反時計回りの方向にずらずようなせん断の状態を表すことが判る．

# Cauchy応力は対称テンソル（対称行列）




**P点での微小立方体について力のモーメントはゼロでなければならないから，**

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}, \sigma_{32} = \sigma_{23}, \sigma_{31} = \sigma_{13}$$

$\Downarrow$

**Cauchy応力は対称テンソル**

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Cauchy応力は対称テンソル（対称行列）

（直観的な理解）

全体がつり合い状態にあれば，P点周辺のの微小立方体もつり合い状態にある．したがって，図を見ると判るように，力の合計がゼロ，力のモーメントがゼロでなければならないから応力成分の（i,j）成分と（j,i）成分が等しくなければならない．さもないと，微小立方体は回転してしまい，全体がつり合っているのにその部分がつり合っていないというおかしなことになる．

この対称性についての正しい証明はつり合い式の誘導において後述．

この対称性は重要な意味を持っている．対称行列に関する算数の力を借りると１点に作用する力の状態の正体が見える．主応力と呼んでいるのがそれである．

# 数学の道具（その2）

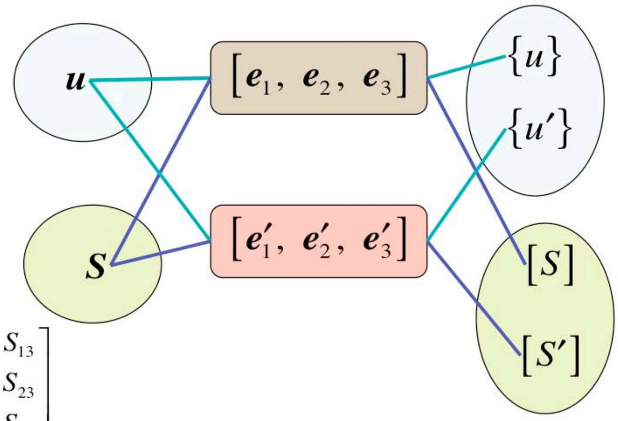
・基底の変換．座標変換則
・対称行列の固有値と固有方向
・対称行列の対角化

# 座標変換則

基底を変えれば顔が変わる！

$$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i \;\rightarrow\; u_i \;\rightarrow\; \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= u'_i \boldsymbol{e}'_i \;\rightarrow\; u'_i \;\rightarrow\; \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{Bmatrix}$$



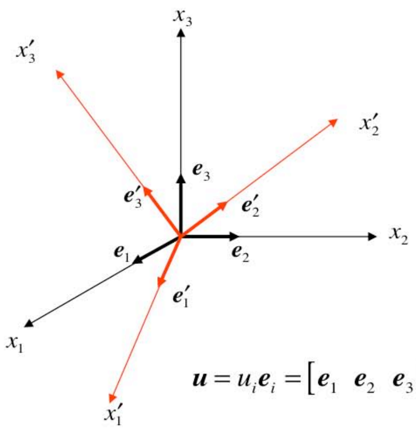

$$\boldsymbol{S} = S_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \;\rightarrow\; S_{ij} \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

$$= S'_{ij}(\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j) \;\rightarrow\; S'_{ij} \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} \\ S'_{21} & S'_{22} & S'_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} \end{bmatrix}$$

座標変換則

正規直交基底は無限通り存在する．基底を変えればベクトルおよびテンソルの顔（成分）も変わる．その変わり方は基底同士の関係に依存する．それを座標変換則という．

# 基底の変換




$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = a_1\boldsymbol{e}_1' + b_1\boldsymbol{e}_2' + c_1\boldsymbol{e}_3' \\ \boldsymbol{e}_2 = a_2\boldsymbol{e}_1' + b_2\boldsymbol{e}_2' + c_2\boldsymbol{e}_3' \\ \boldsymbol{e}_3 = a_3\boldsymbol{e}_1' + b_3\boldsymbol{e}_2' + c_3\boldsymbol{e}_3' \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3 \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

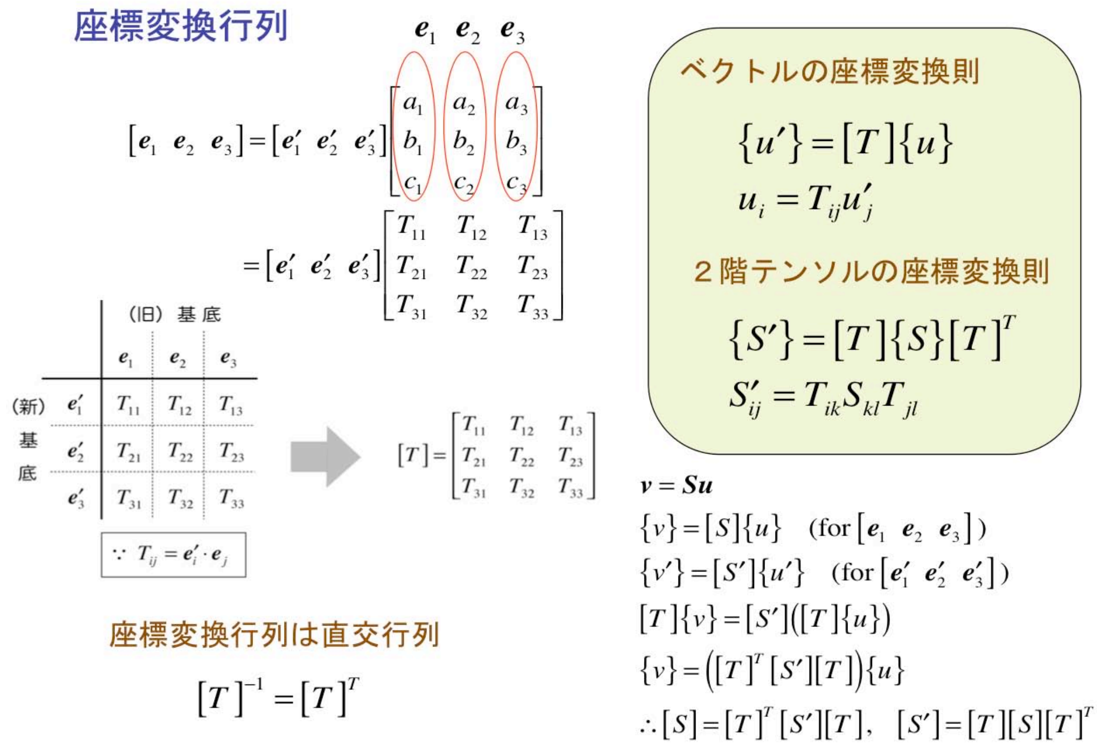
$$= u_i'\boldsymbol{e}_i' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_3' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

## 基底の変換

古い基底 e−系　は新しい基底 e'−系の一次結合で表される．それを図中の式のように，行列を用いて表現する．行列における三つの列ベクトルは，新しい基底 e'−系を参照したときの古い基底 e-系それぞれの数ベクトルを表す．

このように表すと，任意のベクトルuの成分が，基底の変換によって変化する法則が図中の式のようにして導かれる．すなわち，基底の関係を行列を用いて表したとき，ベクトルの新しい顔（成分）はその行列によって古い顔（成分）を変換することで得られる，ということである．




座標変換行列

基底の関係を与える行列のことを座標変換行列という．座標変換行列[T]は図中の表を作成することで得られる．

[T]の列は新基底e’-系を参照したときの旧基底e-系に対応する数ベクトルであり，これらの列ベクトルは長さは１であり，互いに直交する．また， [T]の行は旧基底e-系を参照したときの新基底e’-系に対応する数ベクトルだから，やはり長さが１で互いに直交している．したがって

[T]と[T]転置の積を計算すると対角項に１が並ぶ恒等行列になる．すなわち， [T]の逆行列は[T]の転置行列である．このような性質を持つ行列を直交行列という．

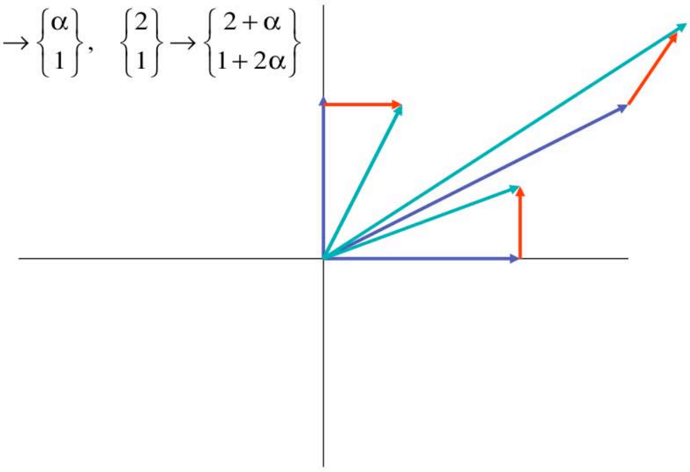
図中の表を作成して座標変換行列[T]を作れば，ベクトルについては[T]で古い顔を変換すれば新しい顔が得られる．また，二階テンソルについては古い顔を左から[T]，右から[T]転置で挟んで変換すれば新しい顔が得られる．その理由は図中に示したとおりである．

ベクトルは一階のテンソルだから変換行列を一回作用させれば良く，二階テンソルは二つの方向に依存しているから座標変換行列を二回作用させることで変換されるのである．

## 対称行列の固有値と固有方向

対称行列による線形変換 $\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} \alpha \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} 2+\alpha \\ 1+2\alpha \end{Bmatrix}$$

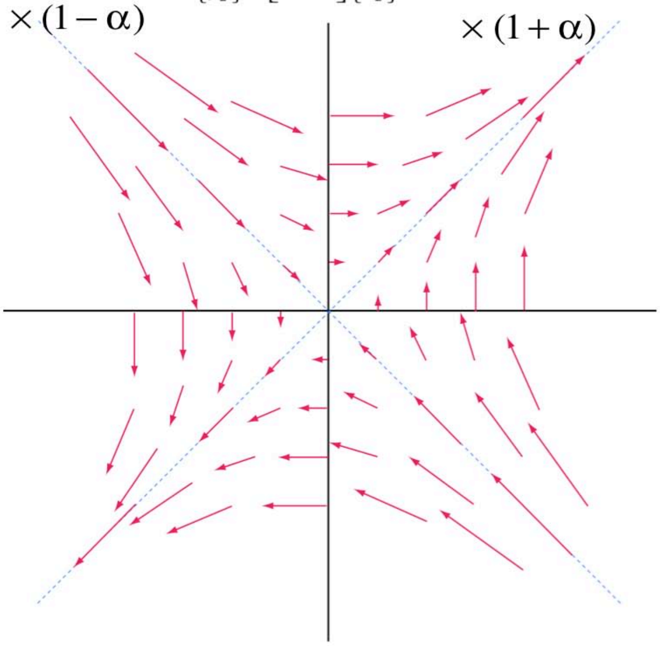


### 対称行列による線形変換

・対称行列によるベクトルの一次変換は「引き延ばし（縮める）＋回転」

ベクトルの変換に伴う点の動きを赤の矢印ベクトルで描けば図のとおり．これを色々な点について行うと，行列で表された一次変換の定義域（今の場合は二次元平面）に対する作用の仕方が明らかになる．

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{3}$$




回転しない方向　→　固有方向
引き延ばし倍率　→　固有値

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ z \end{Bmatrix} = (1+\alpha) \begin{Bmatrix} z \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ -z \end{Bmatrix} = (1-\alpha) \begin{Bmatrix} z \\ -z \end{Bmatrix}$$

固有方向のベクトルは固有値倍に
引き延ばされるだけ．回転しない．

固有値は実数．
固有ベクトルは直交する

対称行列による線形変換（その２）

・互いに直交する方向への引き延ばし作用と，それに伴う回転

対称な行列による一次変換は，平面をゴム膜のように考えてそれを直交する二方向から引っ張って変形させる作用に似ている．直交する方向の直線上の点はその直線上を動くだけである．すなわち，元のベクトルは引き延ばされる（縮まる）だけである．この二方向を固有方向，引き延ばしの倍率を固有値という．

（例） $[A]=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトル

（１）固有ベクトルは伸びるだけ

$$[A]\{n\}=\lambda\{n\}$$

$$\therefore\left([A]-\lambda[I]\right)\{n\}=\{0\}$$

（２）逆行列があると $\{n\}=\{0\}$ だけ

→　逆行列があってはダメ！！

$\therefore \det\left([A]-\lambda[I]\right)=\{0\}$（固有方程式）

$\lambda$ のｎ次方程式（今は２次）

$\lambda$ を上手に選ぶと $\{n\}$ がある！！

$$\det\left([A]-\lambda[I]\right)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1$$

$$=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-4)(\lambda-2)=0$$

$$\therefore \lambda=4,2$$

$$\lambda=4$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_1\\ n_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\ \rightarrow\ n_1=n_2$$（不定）

$$\|n\|=\sqrt{(n_1)^2+(n_2)^2}=1 \quad n_1=n_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

（長さ１の条件を付加）

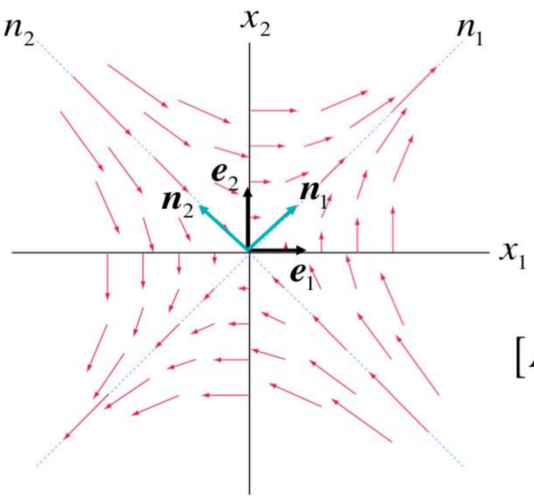
$$\therefore\ \lambda=4,\ \begin{Bmatrix}n_1\\ n_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{Bmatrix}$$

$$\lambda=2,\ \begin{Bmatrix}n_1\\ n_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{Bmatrix}$$

（直交している）

固有値と固有ベクトルの求め方（復習）

## 固有方向への座標変換（対角化）




固有方向に座標軸．表現行列は対角行列に．
対角成分は固有値．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{n}_1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{n}_2$$

$\begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_1 & \boldsymbol{n}_2 \end{bmatrix}$ を正規直交基底に選ぶと

$$\boldsymbol{n}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{n}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

だから，線形変換は

$$[A'] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad [A'] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}$$

したがって，行列は以下の形．

$$\therefore [A'] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

### 固有方向への座標変換

・固有方向に座標軸を設定した時の表現行列は固有値を並べた対角行列になる．

{1,0}，{0,1}がどのように変換されるかによって表現行列が決まる．ところが，固有方向だから固有値倍に引き延ばしを受けるだけ．したがって，表現行列は上に見たとおり対角行列になる．

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ の対角化

固有値と固有ベクトル

$$\therefore\ \lambda = 4,\ \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = 2,\ \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

座標変換行列

| | $\boldsymbol{e}_1$ | $\boldsymbol{e}_2$ |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{n}_1$ | $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ |
| $\boldsymbol{n}_2$ | $-1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ |

$$\therefore [T] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [A'] &= [T][A][T]^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

対称行列の対角化

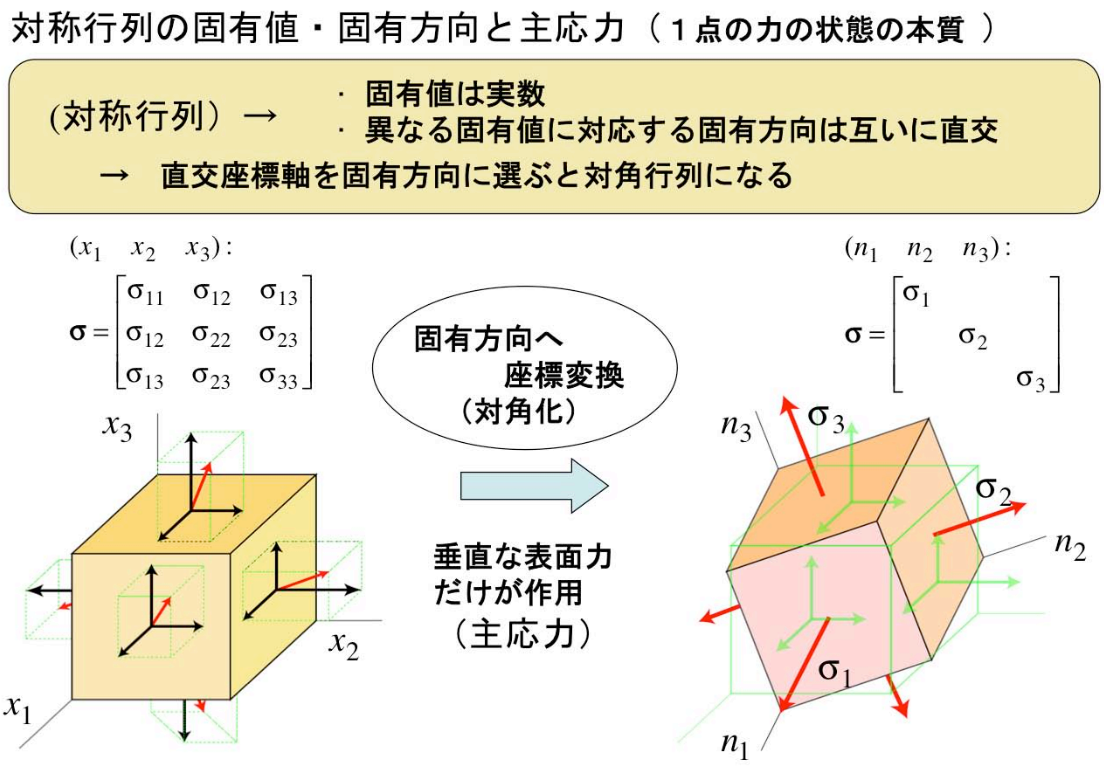
先に固有値と固有ベクトルを求めた行列[A]を対角化してみよう．

固有ベクトルを新しい正規直交基底に選ぶのだから，座標変換行列[T]は図中の表のようにして決まる．

これを用いて[A]を変換すると，確かに固有方向の直角直交座標系では[A]は対角行列になる．そして，成分は固有値である．

# 連続体力学（その2）

・主応力と主軸
・応力テンソルの不変量
・連続体の力のつり合い式




対称行列の固有値・固有方向と主応力

**・対称行列の固有値・固有方向，対角化**

３×３対称行列には，**（１）固有値は３つ(重根を含めて)あり，すべて実数．（２）異なる固有値の固有方向は互いに直交する．**という重要な性質がある．したがって，その互いに直交する固有方向(主軸)に新しく直交座標系を設定できる．そして主軸に沿う新しい座標系で行列を見直すべく座標変換を行うと，行列は対角項に固有値が並び，非対角項は全てがゼロの「対角行列」になる．これを「対称行列の対角化」という．

**・座標軸とCauchyの応力テンソル（行列）**

１点Pの力の状態は力学現象として唯一決まっているのだが，まずは座標軸を設定しないことには我々はそれを定量的に記述できない．応力テンソルを表す行列は３つの座標面上の表面力ベクトルの成分だから座標軸の選び方によって変化する．「P点の応力テンソル」はたった一つなのに，その顔である行列は見る座標系によって変わるのである．

「では，１点の力を表すのに相応しい量とは言えないではないか？」との心配は無用．応力テンソルの顔（行列）の変化の仕方は座標変換則に従う．ある座標系での表現行列が与えられていれば，座標変換によってどう変化するかは全て判る．だから，応力テンソル（行列）が１点の力を表す量としての有用性はゆるがない．

**・Cauchyの応力テンソル（行列）の対角化とその意味**

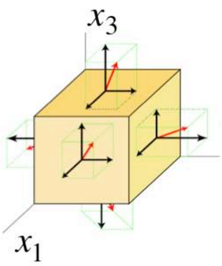
Cauchyの応力テンソルを表す行列は対称行列だから対角化できる．すなわち，主軸に一致する座標軸を新たに設定し，その座標系で見直すと「**Cauchyの応力テンソルは対角化行列という顔で現れる**」ということである．この数学の事実を物理の言葉に置き換えると，「**主軸に垂直な３つの面で切れば，面に垂直な表面力ベクトルが現れる**」ということである．このことは連続体内部の１点の力の状態の正体を示している．

１点における力の状態の本質は「**互いに直交する３方向から押されたり引張られたりしている状態**」であり，その方向に上手に切れば（主軸に垂直に切れば）スッキリとした本質の顔が見えるのである．この互いに直交する３方向からの力は対角項にならぶ固有値によって示される．この応力テンソルの固有値のことを**主応力**という．

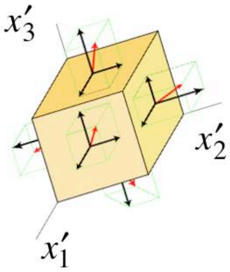
## 応力テンソルの不変量（invariants）

（表現行列）→　座標が変わると顔（成分）が変わる

・座標変換しても変わらないの量（応力テンソルの不変量）




$$(x_1\ \ x_2\ \ x_3):\quad \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{bmatrix}$$




$$(x'_1\ \ x'_2\ \ x'_3):\quad \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13}\\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23}\\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33}\end{bmatrix}$$

$$J_1=\mathrm{tr}[\sigma]=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=\sigma'_{11}+\sigma'_{22}+\sigma'_{33}$$
$$=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$$
$$J_2=\mathrm{tr}([\sigma]^t[\sigma])=\mathrm{tr}([\sigma][\sigma])=\sigma_{ij}\sigma_{ij}=\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$$
$$=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2$$
$$J_3=\det[\sigma]=e_{ijk}\sigma_{i1}\sigma_{i2}\sigma_{i3}=e_{ijk}\sigma'_{i1}\sigma'_{i2}\sigma'_{i3}$$
$$=\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

（基本的な不変量）

$$\det([\sigma]-\lambda[I])=\lambda^3-I_\sigma\cdot\lambda^2+II_\sigma\cdot\lambda-III_\sigma=0$$

（固有方程式）

$$I_\sigma=\mathrm{tr}[\sigma]=J_1$$
$$II_\sigma=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}[\sigma])^2-\mathrm{tr}([\sigma]^t[\sigma])]=\frac{1}{2}[J_1{}^2-J_2]$$
$$III_\sigma=\det[\sigma]=J_3$$

（応力テンソルの不変量）

## 応力テンソルの不変量

### ・表現行列の基本的な不変量

応力テンソルの表現行列[s]は座標を変換すると顔が変わる（成分が変わる）．しかし，座標変換しても変わらない基本的な量がある．それは上に示した tr[s], tr([s][s]), det[s]の３つである．それぞれが成分の１次式，２次式，３次式で示されていることに注意して欲しい．

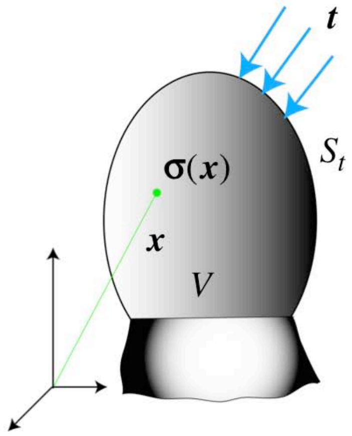
### ・応力テンソルの不変量

応力テンソルの固有値，すなわち主応力を求めるときに解く方程式を固有方程式という．固有方程式は表現行列によらず唯一決まる（主応力が力の状態の本質だから，それを与える方程式が唯一なのは当然である）．固有方程式の係数は基本的な不変量で表すことができ，それぞれ応力テンソルの１次，２次，３次の不変量という．

不変量で記述された式は座標変換に対して不変である．材料の性質を記述する式（構成式）が不変量で記述されているならば，その性質は座標の取り方によらない，すなわち材料の方向に依らないということを意味する．そのような性質を等方性という．

３×３対称行列の固有値，固有ベクトルの求め方，さらには不変量について，自分で一度復習しておくことをお勧めする．

## つり合い式　— 物体内部の力が満たすべき条件 —




$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$：物体が占める領域 $V$ 上のテンソル値関数（場）

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\sigma_{11}(\boldsymbol{x}) & \sigma_{12}(\boldsymbol{x}) & \sigma_{13}(\boldsymbol{x})\\ & \sigma_{22}(\boldsymbol{x}) & \sigma_{23}(\boldsymbol{x})\\ Sym. & & \sigma_{33}(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+\rho b_1=0\\[2mm] \dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}+\rho b_2=0 \quad \text{in} \quad V\\[2mm] \dfrac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\rho b_3=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho b_i=0 \quad or \quad \nabla_x\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \quad \text{in} \quad V$$

物体内部のつり合い式（ Cauchy応力による記述）

$$\sigma_{ij}n_j=t_i \quad or \quad \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t} \quad \text{on} \quad S_t$$

表面荷重ベクトルが与えられる境界において応力が満たすべきCauchyの式

つり合い式　—応力が満たすべき条件—

### ・テンソル値関数としての応力分布

力を受けて静止している物体内には応力が分布する．物体の１点xにはその点の応力テンソルs(x)が１つ対応するテンソル値関数（テンソル場）を形成する．物体が占める３次元領域内の各点毎に，行列がビッシリと書き込まれているとイメージすれば良い．

では，応力はどのように分布するかといえば「**力がつり合っている物体内では，その任意の部分もつり合っている**」ように分布する．

その条件は：

（１）物体が占める３次元領域Vにおいて図に示したような偏微分方程式（つり合い式）を満たすこと．

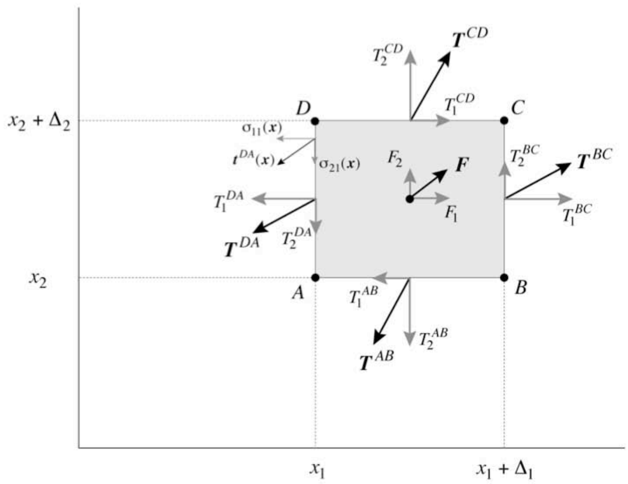
（２）荷重（ゼロ荷重を含めて）が与えられる境界面においては表面荷重ベクトルとのつり合いを満たすこと．

である．これらの条件を満たす応力（場）のことを「静的可容応力（場）」という．

条件（２）は，応力テンソルと表面荷重との間にもCauchyの式が成立せねばならないということを意味している．

# つり合い式の誘導（２次元を例にして）

・応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\sigma_{11}(\boldsymbol{x}) & \sigma_{12}(\boldsymbol{x})\\ \sigma_{12}(\boldsymbol{x}) & \sigma_{22}(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}$ が分布する領域中の微小な長方形に作用する表面力と体積力の合力




$$\boldsymbol{t}^{DA}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\sigma_{11}(\boldsymbol{x}) & \sigma_{12}(\boldsymbol{x})\\ \sigma_{21}(\boldsymbol{x}) & \sigma_{22}(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\sigma_{11}(\boldsymbol{x})\\-\sigma_{21}(\boldsymbol{x})\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^{DA}=\begin{Bmatrix}T_1^{DA}\\T_2^{DA}\end{Bmatrix}=\int_{x_2}^{x_2+\Delta_2}\boldsymbol{t}^{DA}(x_1,x_2)\,dx_2=\begin{Bmatrix}\int_{x_2}^{x_2+\Delta_2}-\sigma_{11}\,dx_2\\ \int_{x_2}^{x_2+\Delta_2}-\sigma_{21}\,dx_2\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-\dfrac{\Delta_2}{2}\left[\sigma_{11}(x_1,x_2)+\sigma_{11}(x_1,x_2+\Delta_2)\right]\\ -\dfrac{\Delta_2}{2}\left[\sigma_{21}(x_1,x_2)+\sigma_{21}(x_1,x_2+\Delta_2)\right]\end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{ij}(x_1,x_2+\Delta_2)=\sigma_{ij}(x_1,x_2)+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_2}\Delta_2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{T}^{DA}=\begin{Bmatrix}T_1^{DA}\\T_2^{DA}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\sigma_{11}\Delta_2-\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_2}\dfrac{(\Delta_2)^2}{2}\\ -\sigma_{21}\Delta_2-\dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}\dfrac{(\Delta_2)^2}{2}\end{Bmatrix}$$

## つり合い式の誘導（その１）

### ・基本方針

まず，応力が分布している領域中の微小な長方形についてのつり合い式を立てる．そして，そのつり合い式について長方形を小さくして点にする極限を考える．すると，１点での力のつり合いを記述する微分方程式が得られる．このようにして微分方程式の誘導する手は，つり合い式に限らずに色んな場面で使われている．

### ・微小な長方形に作用する表面力と体積力

長方形の各辺に作用している応力成分の合力を考える．左辺DA上の表面力$t^{DA}$は応力の定義式とも言えるCauchyの式より　$t^{DA}$=sn．それを辺DAにおいてすべて足し合わせれば，合力$T^{DA}$が得られる．

長方形が微小であることから，応力テンソルの各成分は辺上では直線的に変化するとして扱ってよい．したがって，積分とはいってもそれはＡ,D点の応力成分の値を用いた台形の面積公式で充分.

また，A点からD2だけ離れたD点の応力成分は，A点まわりのテーラー展開の１次項までを考えれば良い．したがって，辺DAに作用する表面力の合力$T^{DA}$が一番下の式のように得られる．

長方形の各辺に作用する表面力の合力ベクトル

$$\boldsymbol{T}^{DA}=\begin{Bmatrix}T_1^{DA}\\T_2^{DA}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\sigma_{11}\Delta_2-\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_2}\dfrac{(\Delta_2)^2}{2}\\-\sigma_{21}\Delta_2-\dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}\dfrac{(\Delta_2)^2}{2}\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{T}^{BC}=\begin{Bmatrix}T_1^{BC}\\T_2^{BC}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\Delta_2+\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}\Delta_1\Delta_2+\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_2}\dfrac{(\Delta_2)^2}{2}\\\sigma_{21}\Delta_2+\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}\Delta_1\Delta_2+\dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}\dfrac{(\Delta_2)^2}{2}\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^{AB}=\begin{Bmatrix}T_1^{AB}\\T_2^{AB}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\sigma_{12}\Delta_1-\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}\dfrac{(\Delta_1)^2}{2}\\-\sigma_{22}\Delta_1-\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_1}\dfrac{(\Delta_1)^2}{2}\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{T}^{CD}=\begin{Bmatrix}T_1^{CD}\\T_2^{CD}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_{12}\Delta_1+\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}\Delta_1\Delta_2+\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}\dfrac{(\Delta_1)^2}{2}\\\sigma_{22}\Delta_1+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}\Delta_1\Delta_2+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_1}\dfrac{(\Delta_1)^2}{2}\end{Bmatrix}$$

長方形に作用する重力などの体積力の合力ベクトル（単位質量辺り $\boldsymbol{b}$ ， 密度 ρ ）

$$\boldsymbol{F}=\rho\boldsymbol{b}\Delta_1\Delta_2=\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\rho b_1\Delta_1\Delta_2\\\rho b_2\Delta_1\Delta_2\end{Bmatrix}$$

## つり合い式の誘導（その１）　（続き）

### ・長方形に作用する（周辺が及ぼす）力

先と同様にして４つの辺に作用する表面力の合力ベクトルが求められる．また，単位質量当たりにbなる重力などの体積力が作用するとすれば，密度を体積にかければ長方形全体の質量になるから，合力ベクトルは簡単に求められる．体積力の合力ベクトルの作用点は重心である．

▫

力のつり合い（力のベクトルの和がゼロ）.

$$\boldsymbol{T}^{DA}+\boldsymbol{T}^{BC}+\boldsymbol{T}^{AB}+\boldsymbol{T}^{CD}+\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$$

$$\begin{Bmatrix}T_1^{DA}\\T_2^{DA}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}T_1^{BC}\\T_2^{BC}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}T_1^{AB}\\T_2^{AB}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}T_1^{CD}\\T_2^{CD}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}\Delta_1\Delta_2+\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}\Delta_1\Delta_2+\rho b_1\Delta_1\Delta_2\\\dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}\Delta_1\Delta_2+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}\Delta_1\Delta_2+\rho b_2\Delta_1\Delta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\rho b_1=0\\\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\rho b_2=0\end{aligned}$$

（つり合い式）

・力のつりあい

微小な長方形は連続体の中で静止しているのだから，作用力ベクトルの合計はゼロ・ベクトルでなければならない．そして，１点で成立する式を求めるために，長方形の微小面積で除してから，大きさをゼロにする極限を考える（今の場合は割り算の後，極限操作を必要としない）と，所望のつり合い式が得られる．

## 応力テンソルの対称性（力のモーメントのつり合い）

### 重心周りの力のモーメントのつり合い

$$\frac{\Delta_1}{2}\left(T_2^{BC}-T_2^{DA}\right)+\frac{\Delta_2}{2}\left(T_1^{AB}-T_1^{CD}\right)=0$$

$$\Delta_1\Delta_2\left(\sigma_{21}-\sigma_{12}\right)+\frac{\Delta_1^2\Delta_2}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}\right)+\frac{\Delta_1\Delta_2^2}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}-\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}\right)=0$$

$\Delta_1\Delta_2$　で割って，極限操作　$\Delta_1\Delta_2 \to 0$

$$\boxed{\therefore \quad \sigma_{21}=\sigma_{12}}$$

（応力テンソルは対称）

・力のモーメントのつりあい

微小長方形が静止するためには，作用力ベクトルの合計がゼロ・ベクトルであるだけでは不十分である．それら作用力の任意点周りのモーメントもゼロになる必要がある．

各辺が微小だから，４つの表面力の合力ベクトルについては作用点が辺の中点であると考えて差し支えない．どの点の周りで力モーメントを考えても良いのだが，重心で考えるのが一番分かり易い．すると，反時計回りを正として，モーメントの合計がゼロという式は上に見るとおり．