第1章　数式の表記法に関する基礎的事項

1.1　概説

本書では，太字（ゴシック体）を用いたゴシック表記，直交デカルト座標系の導入による指標表記ならびにその行列表記を適宜用いる．

これらの表記法にはそれぞれ一長一短がある．ゴシック表記の式は式中の量の関係が理解しやすく，物理的事実の記述に向いている．しかし，そのままでは具体的に計算することはできず，それが表す事実の定量評価には結びつかない．一方，指標表記あるいは行列表記は具体的な計算には向いているが，見た目が煩雑で式が意味するところは見通しにくい．

例えば，ある実数値関数が $f(\boldsymbol{x})$ のようにゴシック表記で示されれば「位置 $\boldsymbol{x}$ には実数値 $f(\boldsymbol{x})$ が定まっている」あるいは「空間にはスカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ が定まっている」という具合に，式が意味するところはすぐに理解できる．しかし，それは数式による事実の記述に過ぎず，このままでは $\boldsymbol{x}$ および $f(\boldsymbol{x})$ を具体的な数値として手に入れることは出来ない．そこで正規直交基底に基づく直交デカルト座標系を一つ導入する．すると，位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ のように成分表示され，それら成分の関数として $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$ のように具体的に関数形が与えられて初めて定量的な扱いが可能となる．指標表記あるいは行列表記はそうした具体的な成分に注目した表記法である．

説明に際しては，これらの表記法の関連が明確になるように心がけた．座標系を背景としたそれぞれの表記法の関連を良く理解して，それらを自在にあやつれるようになることが望ましい．本書では直交デカルト座標系しか用いないが，ここで座標系の役割について理解しておけば，より高度な内容の教科書に記述されている曲線座標系などにもさほど抵抗を感じなくてもすむと思う．

また，連続体力学に現れる主要な微分演算である勾配とラプラシアンについて，それらの演算を図的イメージと結びつけて説明している．連続体力学においては，何かの法則や事実が微分演算，特に勾配を用いて記述される場面は多い．これらの微分演算について図的イメージと共に理解しておけば，色んな場面に現れる式の理解の助けになると思う．

1.2　ベクトル（一階のテンソル）と二階のテンソルに関する基本事項

1.2.1　ベクトルとテンソル：物理量のテンソル特性

ある物理量が**大きさ**に加えて n **個の空間の方向**の情報を持つとき，その物理量を n **階のテンソル**という．物理量が大きさと同時に空間の方向の情報をいくつ含んでいるかということはその物理量の本質的な特性であり，それを量の**テンソル特性**という．

質量や温度などは大きさだけで方向の情報は含んではいない．したがって，質量や温度は**ゼロ階のテンソル**である．ゼロ階のテンソルは**スカラー**とも呼ばれる．連続体力学ではゼロ階のテンソル，すなわちスカラー量は実数で表される．

一方，高校の物理でも習った変位・速度・加速度などの物理量は「ある大きさの量が，この方向に向かって … 」という具合に，大きさに加えて三次元空間内における一つの方向の情報を含んだ量である．したがって，これらは**一階のテンソル**である．変位や速度について既に馴染みのように，一階のテンソルは三次元空間内の矢印ベクトルで表される．したがって，連続体力学では**ベクトル**と呼ばれる．ベクトルは次節以下で見るように，座標系を導入することによって三個の数字を並べた三次元数ベクトルによっても表される[1]．

さらに，これから学ぶ応力やひずみは，大きさに加えて二つの方向の情報を含む**二階のテンソル**である．二階のテンソルは座標系を導入することによって 3×3 正方行列で表される．

1.2.2　正規直交基底と直交デカルト座標系

力学現象が生起する三次元空間の全ての点は，どこかに基準点を定めれば矢印ベクトル（位置ベクトル）で示される．それら全ての矢印ベクトルは，一次独立な（同一平面内にない）三つのベクトル $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ の一結合で表現できる（だから三次元である）．そのように定めた $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ を基底という．基底を定めればそれらを単位ベクトルとする座標系が決まる．

矢印ベクトルの内積は，具体的には高校で習ったとおり $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$ と定義されるが，以下，本書ではドット $(\cdot)$ を用いて

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \equiv \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \tag{1.1}$$

と表す．

[1]数学におけるベクトルとスカラーの定義はもっと抽象的である．8 章 8.1.1 項を参照．

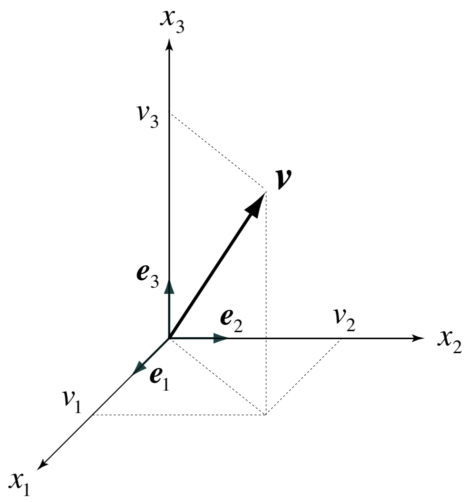

図 1.1: 正規直交基底と直交デカルト座標系

この内積について，

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1\,, \quad \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1\,, \quad \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1 \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0\,, \quad \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0\,, \quad \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \tag{1.3}$$

のように，内積で測った長さが 1 で互いに直交するような基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ を選ぶことができる．このような基底を**正規直交基底（orthonormal basis）**といい，正規直交基底を単位ベクトルとする座標系を**正規直交座標系（orthonormal coordinates）**あるいは**直交デカルト座標系（Cartesian coordinates）**という．

1.2.3　ベクトルの成分，三次元数ベクトル

直交デカルト座標系おいては，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ の一次結合として

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.4}$$

と一意に表される．成分 v_i $(i = 1, 2, 3)$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ と基底 $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ の内積

$$v_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.5}$$

で与えられる（図 1.1 参照）．実際，$i = 1$ を例に取れば，(1.2)，(1.3) 式から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_1 &= (v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3) \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ &= v_1(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1) + v_2(\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1) + v_3(\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1) \\ &= v_1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

である．

このひと組の成分 (v_1, v_2, v_3) は元のベクトル $\boldsymbol{v}$ と一対一に対応する．

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\boldsymbol{e}_i \quad \Longrightarrow \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

したがって，**基底すなわち座標系を固定するという条件のもとで**，それらを並べた数ベクトル $\boldsymbol{v} = \{v_1\ v_2\ v_3\}^T$ を，元のベクトル $\boldsymbol{v}$ と同一視して扱うことができる．

本書では，参照している正規直交基底を固定していることが明らかで，混乱を生じないと判断されるときには，直接に

$$\boldsymbol{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

のような表記も用いるが，その背景には (1.7) 式に表されるような一対一の対応関係があることを忘れてはいけない．

1.2.4　総和規約

ここで，(1.4)，(1.12) 式にある i などの指標を用いた**総和規約**と呼ばれる便利な演算規則を導入する．以下がその規則である．

1. 指標 $i, j, k, \cdots$ は数字 $1, 2, 3$ を代表し，$1, 2, 3$ の全ての数字が順不同で入ることができる．
2. 同じ指標は同一項に二回以上現れてはいけない．
3. 二回現れている指標は $1, 2, 3$ 全ての数字を入れて和を取る．

総和規約に基づく式において，一回だけ現われる指標を**自由指標 (free index)**，二回現れて和を取る指標を**ダミー指標 (dummy index)** という．

以下に総和規約に基づく数式の指標表記の例を挙げる．左が指標表記，右がその意味を具体的に書き下した式である．

1. **自由指標**

$$a_i + b_i = c_i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + b_1 = c_1 \\ a_2 + b_2 = c_2 \\ a_3 + b_3 = c_3 \end{cases} \tag{1.9}$$

   指標 i は各項に一回だけ現れているので自由指標である．i には $1, 2, 3$ の全てが順不同で入るので，右の三つの等式を一度に表していることになる．両辺を挟んだ各項に現れる自由指標は同じでなければ式は意味をなさない．例えば

$$a_i + b_i = c_j\ , \quad a_i + b_j = c_j$$

   のような式は，i, j が $1, 2, 3$ のどの場合に成立するのか不明であり無意味な式である．

2. **ダミー指標**

$$u_i v_i = w_j z_j = c \quad \Longleftrightarrow \quad u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3 = c \tag{1.10}$$

   指標 i, j は同一項に二回現れているからダミー指標であり，右に示したように $1, 2, 3$ 全てを入れて総和を取ることを表す．ダミー指標は二つの同じ指標がどのように現れているか（どの成分について総和を取るか）が重要であり文字は何でも良い．上の例に見るように両辺で文字が異なっていても構わない．

これ以降，本書ではこの総和規約を用いる．例えば (1.4) 式については総和記号 $\sum$ を省略して次のように表す．

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{e}_i \tag{1.11}$$

この総和規約のもとでは，自由指標による成分表示 v_i はベクトル $\boldsymbol{v}$ の三つの成分を象徴的に表すことになる．したがって，**基底すなわち座標系を固定するという条件のもとで**

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i \quad \Longrightarrow \quad \therefore \quad v_i \ \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{1.12}$$

として，数ベクトルと同様にベクトル $\boldsymbol{v}$ と同一視して扱われる．例えば (1.9) 式の指標表記は

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \quad \Longrightarrow \quad \therefore \quad a_i + b_i = c_i \ \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \tag{1.13}$$

のように，最左辺のベクトル和をこの座標系で表現したものであり，その意味は数ベクトルの和と等価である．ただし，v_i という表記は，あくまでベクトルの三成分を v_i $(i = 1, 2, 3)$ の意味で代表的に表し，一つの実数であってベクトル $\boldsymbol{v}$ そのものを直接に表すものではない．したがって，$\boldsymbol{v} = v_i$ のような式は数学的には意味をなさない．

1.2.5 ベクトルの内積の指標表記，クロネッカーのデルタ δ_{ij}

正規直交基底が満たす (1.2)，(1.3) 式の 9 個の関係は，

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} , \qquad \therefore\ \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1.14}$$

と簡潔に表される．δ_{ij} を**クロネッカーのデルタ（Kronecker's delta）**という．

二つのベクトルを正規直交基底で表すと，それらの内積はクロネッカーのデルタを使って総和規約に従うことにより次のようになる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= (u_i \boldsymbol{e}_i) \cdot (v_j \boldsymbol{e}_j) = u_i v_j (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) \\ &= \delta_{ij} u_i v_j \\ &= u_i v_i \end{aligned} \tag{1.15}$$

二段目の i, j はダミー指標だから和を表すが，その際に δ_{ij} は $i = j$ の場合以外はゼロだから，最下段では δ_{ij} が消えて $i = j$ の場合だけが残っている．$u_i v_i$ はダミー指標 i について和を取ることを意味する．それは数ベクトルの内積とも一致する．すなわち，内積 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ は，正規直交座標系の導入によって

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_i v_i = \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{1.16}$$

のように，総和規約に基づく指標表記および数ベクトルの内積として，成分による具体的計算式が与えられるということである．もし，座標系を導入しないでベクトルの内積 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ を求めるとすれば，定規と分度器を使って二つのベクトルの長さ $\|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{v}\|$ とそれらが成す角度 θ を測定し，矢印ベクトルの内積の定義に立ち返って $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$ と計算するしかない．

1.2.6 ベクトルの外積，置換記号 ϵ_{ijk}

図 1.2 のように，二つのベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ があるとき，それらが作る平行四辺形の面積 S は，

$$S = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \sin\theta \tag{1.17}$$

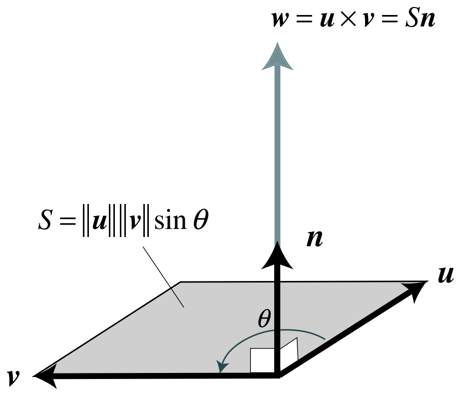

図 1.2: ベクトルの外積

と与えられる．ここで，$\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{v}$ に向かって右ねじ回転となる方向に立てた単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，$\boldsymbol{n}$ を平行四辺形の面積 S 倍したベクトル $S\boldsymbol{n} = \boldsymbol{w}$ を，元の二つのベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ から生成されるベクトルとして

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \equiv S\boldsymbol{n} = \boldsymbol{w} \tag{1.18}$$

と表す．この演算をベクトルの外積という．ベクトルの内積 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ が二つの一階のテンソル（ベクトル）に 0 階のテンソル（スカラー）を対応させるのに対して，外積は二つの一階のテンソルに別の一階のテンソルを対応させる演算である．

外積は内積のように可換ではない．$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ の順番を変えると右ねじ方向は反対になるので，次のようにベクトルの順番を入れ替えると負号がつく．

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \tag{1.19}$$

正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ について外積を考えると，それぞれの長さが 1 で互いに直交すること，右手系を成していることから，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の各組み合わせについての外積は次のようになる（図 1.3 参照）．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1\,, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2\,, \\
&\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1\,, \quad \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2\,, \\
&\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

(1.20) 式の 9 個の関係式は,

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{1.21}$$

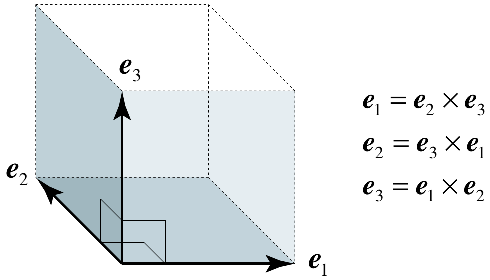

図 1.3: 正規直交基底の外積

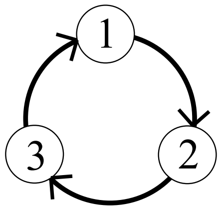

図 1.4: 指標に入る数字の時計回り順

と一つの式で表される．ここに，ϵ_{ijk} は**置換記号（permutation symbol）**という．ϵ_{ijk} は次のように $1, -1, 0$ のいずれかの値をとる．

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (i, j, k) = (2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2) \\ 0 & i = j, \text{ or } j = k, \text{ or } k = i \end{cases} \tag{1.22}$$

すなわち，図 1.4 を参照して，i, j, k に入る数字が図の円上を時計回りにたどる順のとき $\epsilon_{ijk} = 1$，反時計回りのとき -1，同じ数字が二度現れて円をたどらないときに 0 である．また，同じ理由により，指標の入れ替えについては次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki} \ , \\ &\epsilon_{jik} = \epsilon_{kji} = \epsilon_{ikj} = -\epsilon_{ijk} \ , \\ &\epsilon_{ikk} = \epsilon_{kik} = \epsilon_{kki} = 0 \end{aligned} \tag{1.23}$$

(1.18) 式の定義のままでは計算に不便なので，内積の場合と同様に正規直交基底で表現して (1.22),

(1.23) 式を利用すると，外積 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ の指標表記が次のように得られる．

$$
\begin{aligned}
w_i \boldsymbol{e}_i &= (u_j \boldsymbol{e}_j) \times (v_k \boldsymbol{e}_k) \\
&= u_j v_k (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) \\
&= \epsilon_{ijk} u_j v_k \boldsymbol{e}_i
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

すなわち，二つのベクトルの外積は，直交デカルト座標系のもとで指標表記および数ベクトルによる表記が次のように与えられて具体的に計算が可能となる．

$$
\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \epsilon_{ijk} u_j v_k \boldsymbol{e}_i \quad \Longrightarrow \quad \therefore \quad w_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k \;\Leftrightarrow\; \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{Bmatrix}
\tag{1.25}
$$

1.2.7 ベクトルのテンソル積

二つのベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ から二階のテンソルを作る演算を

$$
\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}
\tag{1.26}
$$

と表す．$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ を二つのベクトルのテンソル積という．テンソル積 $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ は，次の定義に従ってあるベクトル $\boldsymbol{w}$ を別のベクトル $\boldsymbol{z}$ に変換する．

$$
\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \equiv (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}
\tag{1.27}
$$

このテンソル積 $\otimes$ は可換ではない．実際,

$$
(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{z} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}
\tag{1.28}
$$

である．

この定義を正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ を (1.27) 式に当てはめれば

$$
(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k = (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_i = \delta_{jk} \boldsymbol{e}_i
\tag{1.29}
$$

を得る．逆に，この (1.29) 式を用いると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \quad \Longrightarrow \quad z_i \boldsymbol{e}_i &= \Big((u_i \boldsymbol{e}_i) \otimes (v_j \boldsymbol{e}_j) \Big) (w_k \boldsymbol{e}_k) \\
&= u_i v_j w_k (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \boldsymbol{e}_k \\
&= u_i v_j w_k (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) \boldsymbol{e}_i \\
&= u_i v_j w_k \delta_{jk} \boldsymbol{e}_i \\
&= v_j w_j u_i \boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) \boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u} \tag{1.30}
$$

のように (1.27) 式が導かれる．したがって，正規直交座標系ではベクトルのテンソル積は (1.29) 式を用いればよい．

二つのテンソル積を並べた積は次式で定義される．

$$
(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{z}) \equiv (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{z}) \tag{1.31}
$$

内側のベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して (1.27) 式が適用されて，残った外側のベクトル同士のテンソル積になる．同様に，正規直交基底については，(1.29) 式を参照して

$$
(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) = (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l) = \delta_{jk}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l) \tag{1.32}
$$

となる．

1.2.8　二階テンソルの成分，三次元正方行列

正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ を導入すると，任意の二階テンソル $\boldsymbol{A}$ は 9 個のテンソル積 $(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ の一次結合として

$$
\boldsymbol{A} = A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \tag{1.33}
$$

のように一意に表される．ここに，成分 A_{ij} は次式で与えられる．

$$
A_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j \tag{1.34}
$$

実際，テンソル積の定義式 (1.29) を用いれば

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j &= \boldsymbol{e}_i \cdot [A_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)]\, \boldsymbol{e}_j \\
&= \boldsymbol{e}_i \cdot \Big(A_{kl} \delta_{lj} \boldsymbol{e}_k \Big) \\
&= A_{kj}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k) = \delta_{ik} A_{kj} \\
&= A_{ij}
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

であることが確かめられる．

二階テンソル $\boldsymbol{A}$ に対して一意に定まる成分 A_{ij} は 3×3 正方行列として表すことができる．これを $\boldsymbol{A}$ の表現行列という．

$$\boldsymbol{A} = A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \implies \therefore\ A_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

基底すなわち座標系を定めれば表現行列が一意に定まることから，**座標系を固定する**という条件のもとで，成分 A_{ij} および正方行列 $[A]$ を二階テンソル $\boldsymbol{A}$ と同一視して扱い，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

のようにも表す．ただし，(1.36) 式の関係が背景にあることを忘れてはならない．

ところで，(1.26) 式に示したテンソル積の表現行列は，同様に

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = u_i v_j(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \implies \therefore\ u_i v_j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

である．すると，この表現行列は二つの数ベクトルの積によって作られていることに気づく．

$$\begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix} \tag{1.39}$$

すなわち，二つのベクトルのテンソル積は，次のような指標表記および数ベクトルの積と同一視できる．

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = u_i v_j(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \implies \therefore\ u_i v_j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix} \tag{1.40}$$

1.2.9 二階テンソルによるベクトルの線形変換

二階テンソル $\boldsymbol{A}$ とは，次のようにあるベクトル $\boldsymbol{u}$ を別のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対応させる線形変換作用素である．

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \tag{1.41}$$

この関係式を正規直交基底を用いて表すと

$$
\begin{aligned}
v_i \boldsymbol{e}_i &= A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(u_k \boldsymbol{e}_k) = A_{ij}u_k(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_i = A_{ij}u_k\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i \\
&= A_{ij}u_j\boldsymbol{e}_i
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

したがって，次のような総和規約に基づいた線形変換の指標表記が得られる．

$$
v_i \boldsymbol{e}_i = A_{ij}u_j\boldsymbol{e}_i \quad \Longrightarrow \quad \therefore \ v_i = A_{ij}u_j \tag{1.43}
$$

式の両辺に現れている i は自由指標，j はダミー指標であり和を取ることを表す．この指標表記を行列を用いて表すと次式となる．

$$
v_i \boldsymbol{e}_i = A_{ij}u_j\boldsymbol{e}_i \quad \Longrightarrow \quad \therefore \ v_i = A_{ij}u_j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{1.44}
$$

このように，二階テンソルによるベクトルの線形変換は，正方行列による数ベクトルの線形変換に一対一に対応している．

二階の恒等テンソル $\boldsymbol{I}$ は，次式のように任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に $\boldsymbol{v}$ 自身を対応させる恒等変換である．

$$
\boldsymbol{I}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \tag{1.45}
$$

正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ を参照したときの $\boldsymbol{I}$ の成分は

$$
I_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{I}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{1.46}
$$

だから，その基底を用いた表現および表現行列は次式となる．

$$
\boldsymbol{I} = \delta_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \quad \Longrightarrow \quad \therefore \ \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.47}
$$

すなわち，$\boldsymbol{I}$ の表現行列は単位行列である．

さて，二つのベクトルのテンソル積によるベクトルの線形変換 (1.30) 式は，(1.40) 式の議論を踏まえれば，次のように三つの数ベクトルの積として表されることになる．

$$
\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \quad \Longrightarrow \quad \therefore \ z_i = u_i v_j w_j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \tag{1.48}
$$

ここで，数ベクトルの積を左から順に計算するならば，一般の二階テンソルと同じ行列による数ベクトルの変換として表される．

$$z_i = (u_i v_j) w_j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \left(\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \tag{1.49}$$

ところが，数ベクトルの積は結合則を満たすので，順番さえ変えなければ二番目と三番目の数ベクトルの積を先に計算してもよい．すなわち，

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \left(\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \right) \tag{1.50}$$

が成立する．この最右辺の二番目と三番目の数ベクトルの積は (1.16) 式で見たように数ベクトルの内積に他ならない．そこで，内積の結果は実数だから係数として前に持ってくれば

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \right) = (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad z_i = (v_j w_j) u_i$$

$$\Longrightarrow \quad \therefore \ \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) \boldsymbol{u} \tag{1.51}$$

のように (1.27) 式の右辺が導かれる．以上の (1.48) から (1.51) 式が，(1.27) 式の線形変換の数ベクトルによる行列演算としての記述である．

1.2.10 二階テンソルの転置テンソル

任意の二階テンソル $\boldsymbol{A}$ に対して，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ について，常に

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x} \tag{1.52}$$

を満たすテンソル $\boldsymbol{A}^T$ が一意に存在する．$\boldsymbol{A}^T$ を $\boldsymbol{A}$ の**転置テンソル**（**transpose tensor**）という．明らかに $\left(\boldsymbol{A}^T\right)^T = \boldsymbol{A}$ である[2]．この定義から $\boldsymbol{A}^T$ の成分については

$$A^T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_i = A_{ji} \tag{1.53}$$

[2](1.52) 式から

$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{A}^T\right)^T \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \left(\boldsymbol{A}^T\right)^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}$$

である．

が成立する．したがって，$\boldsymbol{A} = A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$ に対して $\boldsymbol{A}^T$ の基底表示は

$$\boldsymbol{A}^T = A^T_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = A_{ji}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \tag{1.54}$$

となる．成分と基底における指標 (i, j) の対応関係に注意して欲しい．実際，(1.54) 式のようであれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x} &= (y_l \boldsymbol{e}_l) \cdot \Big(A_{ji}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\Big)(x_k \boldsymbol{e}_k) = y_l A_{ji} x_k (\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) = y_l A_{ji} x_k \delta_{li} \delta_{jk} = x_j A_{ji} y_i \\ &= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}\end{aligned} \tag{1.55}$$

であり，確かに転置テンソルの定義に従う．このようにして定まる $\boldsymbol{A}^T$ が $\boldsymbol{A}$ について一意であることは明らかである．また，このような成分の関係から，$\boldsymbol{A}$ の表現行列が $[A]$ のとき，$\boldsymbol{A}^T$ の表現行列には $[A]$ の転置行列 $[A]^T$ が対応することがわかる．

1.2.11　二階テンソルの逆テンソル

二階テンソル $\boldsymbol{A}$ に対して，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \tag{1.56}$$

が成立するとき，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ と表して $\boldsymbol{A}$ の**逆テンソル**（**inverse tensor**）という[3]．$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$ と基底表示したとき，これに対して逆テンソルを

$$\boldsymbol{A}^{-1} = A^{-1}_{pq}(\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q) \tag{1.57}$$

のように表すと，定義式 (1.56) は次のように展開される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} &= \Big(A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\Big)\Big(A^{-1}_{pq}(\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q)\Big) = A_{ij}A^{-1}_{pq}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_p)(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_q) = A_{ij}A^{-1}_{pq}\delta_{jp}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_q) \\ &= A_{ij}A^{-1}_{jq}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_q) \\ &= \delta_{iq}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_q) = \boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{1.58}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} &= \Big(A^{-1}_{pq}(\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q)\Big)\Big(A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\Big) = A^{-1}_{pq}A_{ij}(\boldsymbol{e}_q \cdot \boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_j) = A^{-1}_{pq}A_{ij}\delta_{qi}(\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_j) \\ &= A^{-1}_{pq}A_{qj}(\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_j) \\ &= \delta_{pj}(\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{1.59}$$

すなわち，$\boldsymbol{A}^{-1}$ の成分 A^{-1}_{pq} と $\boldsymbol{A}$ の成分 A_{kl} との間には次の関係が成立する．

$$A_{ij}A^{-1}_{jq} = \delta_{iq}\,, \quad A^{-1}_{pq}A_{qj} = \delta_{pj} \tag{1.60}$$

[3]逆テンソルは $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ のときに存在する．このとき $\boldsymbol{A}$ は正則であるという．

1.2.12 二階テンソルの内積

二階テンソル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ の内積を

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} \tag{1.61}$$

と表す．演算 (:) は，二つのテンソル積について，

$$(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) : (\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{z}) \equiv (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{z}) \tag{1.62}$$

のように，それぞれのテンソル積 $(*\otimes*)$ の左右の対応する位置にあるベクトル同士を内積して，その二つの内積の値を掛け合わせる操作として定義する．

正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ については次のようになる．

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) : (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l) = \delta_{ik}\delta_{jl} \tag{1.63}$$

したがって，一般の二階テンソルについての内積 $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$ を正規直交基底を用いて表すと，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} &= \left(A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\right) : (B_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)) \\ &= A_{ij}B_{kl}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) : (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) \\ &= A_{ij}B_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} \\ &= A_{ij}B_{ij} \end{aligned} \tag{1.64}$$

が導かれる．指標 i，j はダミー指標である．式に見るとおり，正規直交座標系においては，二階テンソル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ の内積は，それぞれの対応する 9 個の (i, j) 成分を掛けてそれらを足し合わせればよい．

この計算は $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ それぞれの表現行列 $[A]$，$[B]$ の積のトレースに一致する．すなわち，二階テンソルの内積は次のような指標表記および行列の演算と対応する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} \implies \therefore\ A_{ij}B_{ij} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{tr}\left([A]^T[B]\right) &= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}\right) \\ &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{13}B_{13} \\ &\quad + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{23} \\ &\quad\quad + A_{31}B_{31} + A_{32}B_{32} + A_{33}B_{33} \end{aligned} \tag{1.65}$$

ここに，$\mathrm{tr}([*])$ はトレース演算を表し，行列 $[*]$ の対角項の和を取ることを意味する．また，トレース演算の性質 $\mathrm{tr}[A] = \mathrm{tr}[A]^T$，$\mathrm{tr}([A][B]) = \mathrm{tr}([B][A])$ から，

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \mathrm{tr}\left([A]^T[B]\right) = \mathrm{tr}\left([B]^T[A]\right) = \mathrm{tr}\left([A][B]^T\right) = \mathrm{tr}\left([B][A]^T\right) \tag{1.66}$$

である．この内積演算は，次に示すように二階テンソルを９次元の数ベクトルに展開して内積計算することと同じである．

$$A_{ij}B_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ \cdots \\ B_{33} \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{13}B_{13} \\ &\quad + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{23} \\ &\quad\quad + A_{31}B_{31} + A_{32}B_{32} + A_{33}B_{33} \end{aligned} \tag{1.67}$$

恒等テンソル $\boldsymbol{I}$ との内積は任意の二階テンソル $\boldsymbol{A}$ のトレースを与える．

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{I} = A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = \mathrm{tr}[A] = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} \tag{1.68}$$

また，二階テンソルの積と内積が組み合わさっているとき，内積 (:) を飛び越えて二階テンソルを移すには，次に示すとおり，反対側において同じ方向から転置テンソルを掛け合わせればよい．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} : \boldsymbol{BC} &= A_{ij}B_{ik}C_{kj} \\ &= B_{ik}A_{ij}C_{kj} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A} : \boldsymbol{C} \\ &= A_{ij}C_{kj}B_{ik} = \boldsymbol{AC}^T : \boldsymbol{B} \\ &= \delta_{jm}A_{ij}B_{ik}C_{km} = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{BC} \end{aligned} \tag{1.69}$$

したがって，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B} &= \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}\right) \\ = \boldsymbol{AB}^T : \boldsymbol{I} &= \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{AB}^T\right) \end{aligned} \tag{1.70}$$

であり，行列で表した (1.66) 式に一致する．

1.2.13　四階テンソルによる二階テンソルの線形変換

ベクトル（一階テンソル）が二階テンソルによって別のベクトルに線形変換されるように，二階テンソルは四階テンソルによって別の二階テンソルに線形変換される．したがって，$\mathcal{G}$ を四階テンソル，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ を二階テンソルとすると，線形変換という意味では

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{G}\boldsymbol{A} \tag{1.71}$$

のように表すことが適当かも知れない．実際，そのような記述法の教科書もいくつか見かける．

これを正規直交基底を用いて表すと，

$$B_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \mathcal{G}_{ijkl}A_{kl}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \tag{1.72}$$

である．これは，右辺について

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{ijkl}A_{kl}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) &= \mathcal{G}_{ijkl}A_{mn}\delta_{km}\delta_{ln}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \mathcal{G}_{ijkl}A_{mn}\delta_{km}(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_m)(\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_n)(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \\ &= \mathcal{G}_{ijkl}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) : (A_{mn}(\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n))\end{aligned} \tag{1.73}$$

のように，$\mathcal{G}$ の基底における後ろのテンソル積に対して二階テンソルの内積 (:) のような演算を行っていることに他ならず，このときの基底に関する演算は二階テンソルによるベクトルの線形変換とは異なるルールになっている．したがって，本書では混乱を避けるためにこのような四階テンソルによる二階テンソルの線形変換については，多くの連続体力学の教科書にならって二階テンソルの内積の記号 (:) を用いて

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{G} : \boldsymbol{A} \tag{1.74}$$

と表すことにする．

1.3　主要な微分演算子：勾配とラプラシアン

1.3.1　勾配 (gradient)

空間内のある領域 Ω において，位置 $\boldsymbol{x}$ を指定するとスカラー値（実数値）$f(\boldsymbol{x})$ がただ一つ定まるとき，$f(\boldsymbol{x})$ を Ω を定義域とするスカラー場という．考えている定義域の空間の全ての位置 $\boldsymbol{x}$ にびっしりと実数値 $f(\boldsymbol{x})$ が書き込まれている，というイメージである．例えば，運動する物体が空間内に占める領域を Ω として，その物体内に分布する温度のような物理量が Ω を定義域とするスカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ になる．

空間の位置 $\boldsymbol{x}$ は直交デカルト座標系の導入により

$$\boldsymbol{x} = x_i e_i \implies \therefore\ x_i \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \tag{1.75}$$

のように指標表記および数ベクトルで表され，それを背景としてスカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ は

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3) \tag{1.76}$$

のように空間座標 (x_1, x_2, x_3) の多変数関数として初めて具体的な形が与えられる．

スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ については，しばしば値そのものでなく値の変化が興味の対象となる．その際，変化を知る手がかりとしては，空間座標 (x_1, x_2, x_3) の関数だから，それぞれに関する三つの偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{1.77}$$

が基本的である．スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ について，これら三つの偏導関数を成分に持つ次のようなベクトル

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f = \nabla_x f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} & \\ \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_3 = \frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \implies \therefore\ \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \Leftrightarrow \quad & \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{1.78}$$

をスカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ の勾配（gradient）という．∇_x の下付指標はそれが変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ についての偏導関数であることを示すが，変数が明らかな場合には省略される．また，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$ は $\operatorname{grad} f$ の略記であるが，微分変数が明らかであるという利点がある．本書では多くの場合この記法を用いる．

スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ が与えられているとき，

$$f(\boldsymbol{x}) = c \quad (c \text{ は任意定数}) \tag{1.79}$$

を満たす点 $\boldsymbol{x}$ の集合は定義域 Ω における一つの曲面（等関数値曲面）になる．そして c を変化させれば，それらの曲面は c をパラメータとする曲面群を構成する．点 $\boldsymbol{x}$ における勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{x})$ は，その点を通る等関数値曲面に垂直かつ関数値が増加する方向のベクトルになる．そして，その長さは，定義式に見るとおり，$f(\boldsymbol{x})$ の変化の大きさを表す．

このことを図 1.5 に示すような二次元空間上のスカラー場 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2)$ について見てみよう．この場合，$f(\boldsymbol{x}) = c_i\ (c_1 < c_2 < \cdots < c_n)$ を満たす点 $\boldsymbol{x}$ の集合は，図に見るとおり，二次元平面における地図の等高線のような曲線群を描く．ここで，点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ から $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} = (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ へ移動した時のスカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ の変化を考えると，それは Taylor 展開によって

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + O(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2) \quad \because\ \|\Delta\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} \end{aligned} \tag{1.80}$$

と与えられる．この変化量 Δf を見ると，それは変数の変化量を $\|\Delta\boldsymbol{x}\| \to 0$ としたときにいち早く消える部分 $O(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2)$ と，同程度の早さでゼロに近づく部分から構成されている．このうち $\|\Delta\boldsymbol{x}\|$ と

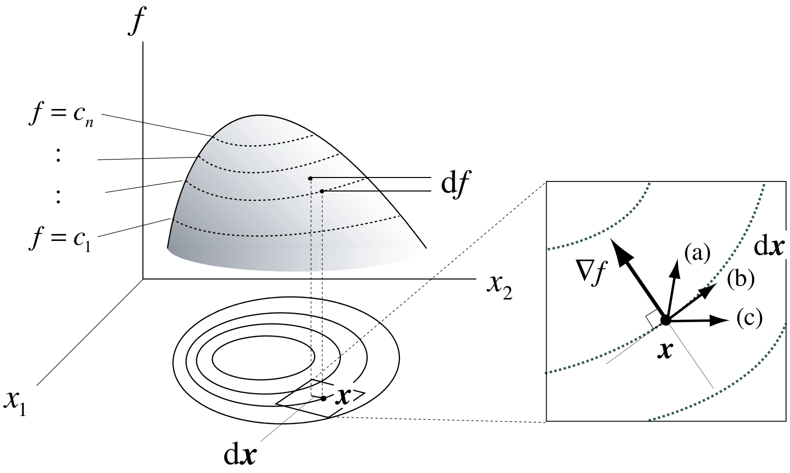

図 1.5: 二次元スカラー場の勾配ベクトル

同程度の早さでゼロに近づく部分 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)$ は，いうなれば微小変化 Δf の**主要部**である．この主要部を $\mathrm{d}f$ と表して f の**全微分**あるいは単に**微分**という．独立変数の変化量 Δx_1，Δx_2 については それらがそのまま主要部であり $\mathrm{d}x_1 = \Delta x_1$，$\mathrm{d}x_2 = \Delta x_2$ である[4]．したがって，$f(\boldsymbol{x})$ の変化を示す全微分の式は次のようになる．

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \tag{1.81}$$

ところが，この全微分は

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}\begin{Bmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\end{Bmatrix}\\ &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{1.82}$$

であり，点 $\boldsymbol{x}$ における勾配ベクトル ∇f と $\boldsymbol{x}$ からの微小移動量を示す微分ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ との内積に他ならない．すなわち，点 $\boldsymbol{x}$ における勾配ベクトル ∇f が判れば，そこからの任意の微小変化 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ に対するスカラー場の変化 $\mathrm{d}f$ は，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ を ∇f に内積すればわかるということである．この事実は極めて重要である．

[4]例えば，独立変数 x_1 については $g(x_1) = x_1$ と考えればよい．すると，

$$\Delta g = \frac{\mathrm{d}g(x_1)}{\mathrm{d}x_1}\Delta x_1 + O\left((\Delta x_1)^2\right) = \Delta x_1 + O\left((\Delta x)^2\right)$$

だから，主要部すなわち微分は $\mathrm{d}x_1 = \Delta x_1$ である．

いま，点 $\boldsymbol{x}$ からの微小変化を与えるベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \{\mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2\}^T$ を，図 1.5 の (b) のように等高線上に選ぶ．それは f の値が変化しない方向だから，(1.82) 式は

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \tag{1.83}$$

である．これは勾配ベクトル ∇f が等高線上の微小な移動ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ と直交すること，∇f はこの点を通る等高線に垂直であることを意味する．

次に，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ を図 1.5 の (a) に選べば，それは f が増加する方向だから

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} > 0 \tag{1.84}$$

であり，(c) に選べば f が減少する方向だから

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} < 0 \tag{1.85}$$

となる．この二つの式は勾配ベクトル ∇f が (a) の $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ とは鋭角を成し，(c) の $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ とは鈍角を成していること，すなわち，∇f が f が増加する方向を向いていることを意味する．

こうして，スカラー場の勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{x})$ は，点 $\boldsymbol{x}$ を通る等高線（等関数値曲面）に垂直に関数値が増加する方向を向いたベクトルであることがわかる．三次元空間を定義域とするスカラー場の場合，∇f は三次元空間に描かれる等関数値曲面に垂直で関数値が増加する方向を向く三次元ベクトルになる．

スカラー場の勾配ベクトルが物理的な意味を持つ量であるとき，それを生み出す源になっていることからスカラー場は**スカラーポテンシャル**あるいは単に**ポテンシャル**と呼ばれる．スカラーポテンシャルとその勾配ベクトルの組み合わせは色んな場面で現れる．例えば，熱伝導の問題においてはフーリエ（Fourier）則が

$$\boldsymbol{q} = -\lambda \nabla T \qquad (\boldsymbol{q}：\text{熱流束ベクトル},\quad T：\text{温度ポテンシャル},\quad \lambda：\text{熱伝導係数}) \tag{1.86}$$

のように与えられるが，これは熱流束ベクトル（単位時間当たりの熱移動量ベクトル）$\boldsymbol{q}$ が温度ポテンシャル $T(\boldsymbol{x})$ の勾配ベクトルの逆向きに比例して現れるという式であり，温度が高い方から低い方へ熱が流れるということの数式表現である．比例係数 λ は熱伝導係数と呼ばれる物質の特性値である．よく似た式として，物質の移動拡散問題においては物質は濃度が濃い方から薄い方へ移動するというフィック（Fick）則や，地盤の透水現象において水は高い方から低い方へ流れることをいうダルシー（Darcy）則などがある．

$$\boldsymbol{w} = -\mu \nabla C \qquad (\boldsymbol{w}：\text{物質流束ベクトル},\quad C：\text{濃度ポテンシャル},\quad \mu：\text{分散係数}) \tag{1.87}$$

$$\boldsymbol{v} = -\kappa \nabla H \qquad (\boldsymbol{v}：\text{浸透流速度ベクトル},\quad H：\text{水頭ポテンシャル},\quad \kappa：\text{透水係数}) \tag{1.88}$$

このほか，重力場あるいは電場や磁場などにおいては，物体に作用する力のベクトルがそれらスカラーポテンシャルの勾配で与えられる．そのような力のベクトルは保存力と呼ばれる．

1.3.2　ラプラシアン

スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ のラプラシアンは空間変数に関する二階偏微分の演算として次式で定義される．

$$\nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \tag{1.89}$$

一次元のスカラー値関数 $f(x)$ の二階微分 $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ は $f(x)$ のグラフの凹凸を表すことは高校の数学で習う．(2.5) 式の $\nabla^2 f$ はその拡張であり，やはりスカラー場の凹凸に関係している．二次元平面を定義域とするスカラー場 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2)$ を例にその様子を見てみよう．

それは差分の形にすると判りやすい．二階偏微分を差分で表せば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &\simeq \frac{1}{h}\left[\frac{f(x_1+h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} - \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1-h, x_2)}{h}\right] \\ &= \frac{2}{h^2}\left[\frac{f(x_1+h, x_2) + f(x_1-h, x_2)}{2} - f(x_1, x_2)\right] \end{aligned} \tag{1.90}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &\simeq \frac{1}{h}\left[\frac{f(x_1, x_2+h) - f(x_1, x_2)}{h} - \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2-h)}{\Delta x_2}\right] \\ &= \frac{2}{h^2}\left[\frac{f(x_1, x_2+h) + f(x_1, x_2-h)}{2} - f(x_1, x_2)\right] \end{aligned} \tag{1.91}$$

だから，ラプラシアンの差分表現は次式となる．

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\ &\simeq \frac{4}{h^2}\left[\frac{f(x_1+h, x_2) + f(x_1, x_2+h) + f(x_1-h, x_2) + f(x_1, x_2-h)}{4} - f(x_1, x_2)\right] \end{aligned} \tag{1.92}$$

この式の右辺は，注目している点における関数値 $f(x_1, x_2)$ と，その周囲の四点における関数値の平均値との大小比較になっている．図 1.6 のように，点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ における関数値 $f(x_1, x_2)$ が前後左右の四点の平均値よりも小さいとき，すなわち，点 $\boldsymbol{x}$ 付近において関数曲面が下に凸のときは $\nabla^2 f > 0$，反対に上に凸の場合は $\nabla^2 f < 0$ となる．そして，その差が大きくなる（凹凸の曲率が大きくなる）ほど $\nabla^2 f$ の絶対値は大きくなることがわかる．

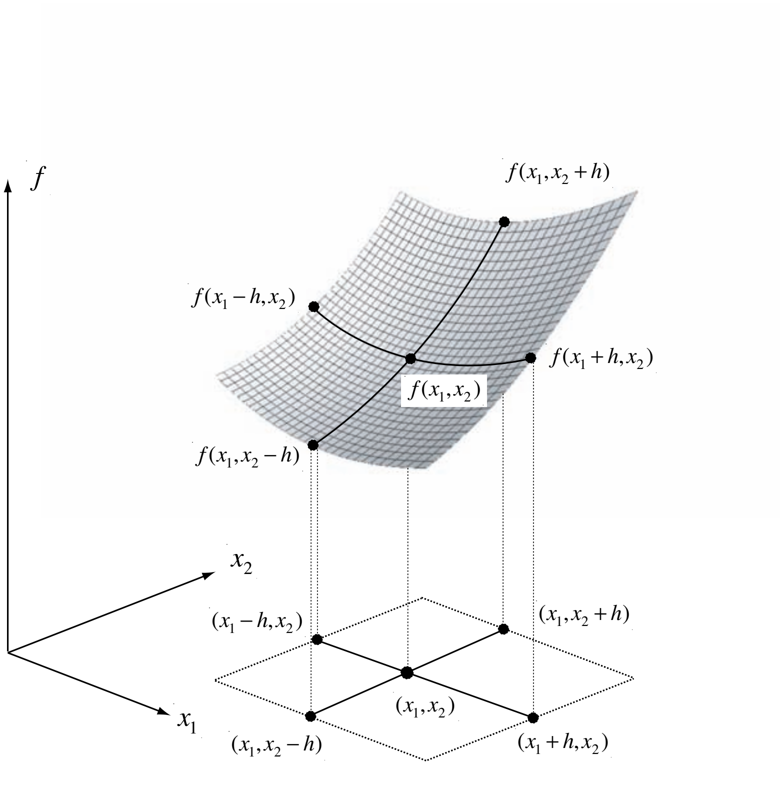

図 1.6: ラプラシアンの差分近似の図

第2章　数式操作のための基本的な道具

2.1　ベクトルとテンソルの演算に関する道具

2.1.1　線形空間，ベクトル，スカラー

ある集合 E において，加法（和）と呼ばれる演算と数乗法が定義されていて，それら演算の結果がまた集合 E に属している（加法と数乗法について閉じている）とする．すなわち，式で表せば

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E \implies \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in E \tag{2.1}$$

$$\forall \boldsymbol{a} \in E,\ \forall \lambda \in K \implies \lambda \boldsymbol{a} \in E \tag{2.2}$$

であるとする[1]．ここに，λ は数乗法に用いる係数であり，その集合を K と表している．K は E の係数体と呼ばれ，四則演算（加減乗除）について閉じている集合ならば何でもよい．一般に K には実数体 R や複素数体 C が選ばれるが，実際の現象を扱う連続体力学の問題ではもっぱら実数体 R を用いる．

さらに，この加法と数乗法が次の性質を満たしているとする．

1. $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$ について
   $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

2. $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in E$ について
   $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

3. ゼロ元（要素）$\boldsymbol{0}$ が存在して，$\forall \boldsymbol{a} \in E$ について
   $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

4. $\forall \boldsymbol{a} \in E$ に対して，必ず逆元 $\exists \boldsymbol{a}' \in E$ が存在して
   $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}$.

[1] **「任意 ∀」と「ある ∃」**：記号 ∀ は「任意の」と読む．英語の Arbitrary の頭文字を逆さまにした記号である．これと対をなす記号として,「昔ある所に ⋯」の「ある」を指す ∃ がある．there Exists の E を逆さまにした記号である.「$\forall x \in G$ について ⋯」は「G に属する任意の x，すなわち G の要素のどれでも（つまりは全ての要素について）⋯」を意味する．また,「$\exists x \in G$ について ⋯」は「G に属するある x，すなわち G の中の少なくとも一つの要素について ⋯」という意味になる．

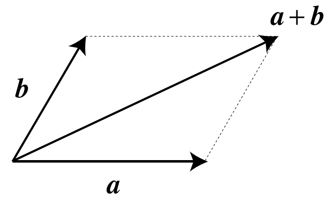

図 2.1: 矢印ベクトルの加法と数乗法

5. $\forall \boldsymbol{a} \in E$ について
   $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.$
6. $\forall \boldsymbol{a} \in E$，$\forall \lambda, \mu \in K$ について
   $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$
7. $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$，$\forall \lambda \in K$ について
   $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$
8. $\forall \boldsymbol{a} \in E$，$\forall \lambda, \mu \in K$ について
   $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$

このとき，集合 E を係数体 K 上の線形空間あるいはベクトル空間といい，線形空間 E の要素 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ をベクトル，係数体 K の要素 λ, μ をスカラーという．以上が数学的なベクトルとスカラーの定義である．

線形空間 E から任意に選んだ k 個のベクトルについて，

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0} \tag{2.3}$$

を成り立たせる係数の組が $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ の場合に限るとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ は一次（線形）独立，そうでない場合は一次（線形）従属であるという．一次従属の場合，$\lambda_k \neq 0$ に対応するベクトルは残りの $(k-1)$ 個のベクトルの線形結合で表される．実際，(8.3) 式において，例えば $\lambda_1 \neq 0$ とすれば，

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_3 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_k \tag{2.4}$$

のように，$\boldsymbol{a}_1$ が残りの $(k-1)$ 個のベクトルの線形結合で表される．

一次独立となるベクトルの選び方は無数にある．しかし，一次独立となるベクトルの数に上限があり，それは線形空間によって決まっている．すなわち，n 個の一次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$

を選んだ後に，$(n+1)$ 個目にどんなベクトル $\boldsymbol{a}_n$ を選ぼうとも必ず一次従属になってしまうような上限の数 n が線形空間毎に決まるのである．そのような n を線形空間の次元という．

高校で習う矢印ベクトルの集合は，図 8.1 に示すように，幾何学的に定義された平行四辺形の法則による加法と長さを引き伸ばす数乗法について上記の性質を満たす線形空間になる．そして，その要素である矢印ベクトルは文字通りベクトルである．

しかし，矢印ベクトルだけがベクトルではない．この定義を満たす線形空間は無数に存在し，その要素としてのベクトルも様々である．

（例 1）n 個の実数を縦に並べた列を要素とする集合は，

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{Bmatrix}, \qquad \lambda \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

のように定義した加法と数乗法について線形空間をなす．したがって，その要素はベクトルであり，数ベクトルと呼ばれる．各要素が n 個の数字で構成されていれば，最大 n 個の一次独立な数ベクトルを選ぶことが出来るので線形空間は n 次元である．n 次元数ベクトルで構成されるこの線形空間は R^n と表される．

（例 2）x の高々n 次までの多項式 $p_a = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n$ の集合は，

$$p_a + p_b \equiv (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_n+b_n)x^n = \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)x^k$$

$$\lambda p_a \equiv \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 \cdots + \lambda a_n x^n \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k$$

を加法と数乗法とする $(n+1)$ 次元線形空間となる．多項式 p_a，p_b は $(n+1)$ 次元ベクトルである．

（例 3）区間 $[a,b]$ における連続関数 $f(x)$ の集合は，

$$(f+g)(x) \equiv f(x) + g(x), \qquad \lambda f(x) \equiv \lambda f(x) \tag{2.6}$$

を加法と数乗法とする線形空間であり，関数 f，g はベクトルである．この線形空間は無限次元である．

我々が生活する空間内の全ての点は，任意に設定した基準点からの矢印ベクトルで表すことができる．そして，それら矢印ベクトルの中から，一つの平面に収まらない三本の矢印ベクトルを任意に選べば，それ以外のベクトルは全てそれらの線形結合で表すことが出来る．したがって，我々が

生活する空間は矢印ベクトルで構成される三次元の線形空間である．同様に，平面内の矢印ベクトルの集合では二つの一次独立なベクトルを選ぶことができて，三つ以上選ぶと一次従属になってしまう．したがって平面は二次元である．

ベクトルは数学的概念を意味する用語であり,（例 1）から（例 3）に見たように様々なベクトルがある．しかし，連続体力学は我々の生活空間で生起する現象を扱うが故に，連続体力学において単にベクトルと言うときはもっぱら空間に密着している矢印ベクトルを表す．ただし，矢印ベクトルの三つの成分を並べたものを数ベクトルと呼ぶなど，数学的概念としてのベクトルという用語が所々で顔を出すので注意する．

2.1.2　内積

ある集合において，その中の任意の２つの要素に対して一つの実数を対応させる演算 $\langle *, * \rangle$ があって，それが内積公理と呼ばれる次の簡単なルールを満たすとき，演算 $\langle *, * \rangle$ をその集合における内積という．

1. （線形性）$\langle \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} \rangle$,　$\langle \lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$
2. （可換性）$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$
3. （正値性）$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0$.　$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$ ならば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

この簡単なルールを満たせばよいだけなので内積は無数に考えることができる．高校で習った矢印ベクトルについての内積だけが内積ではない．

内積を一つ決めると，その正値性に基づいて要素の「大きさ」あるいは要素間の「距離」が次式のように定義できる．

$$\|\boldsymbol{a}\| \equiv \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}, \quad \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| \equiv \sqrt{\langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \rangle} \tag{2.7}$$

また，正値性から任意の実数 λ について，

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \lambda \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rangle \\ &= \lambda^2 \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + 2\lambda \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\ &= \lambda^2 \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\lambda \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \|\boldsymbol{b}\|^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

が成立する．これを λ の二次式と見れば，任意の λ について常に非負なのだから，判別式は

$$(D/4) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{b}\|^2 \leq 0 \tag{2.9}$$

でなければならない．すなわち，

$$-1 \leq \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|} \leq 1 \tag{2.10}$$

が成立する．これを Schwarz（シュワルツ）の不等式といい，これを用いて要素間の角度 θ が

$$\cos\theta \equiv \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|} \tag{2.11}$$

のように定義される（高校では「二つの矢印ベクトルの成す角が θ のとき，内積を $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \equiv \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$ と定義する」と習った．これはその定義をも包含する一般化した議論）．

こうして内積 $\langle *, * \rangle$ はその集合における長さと角度を測る万能定規になる．特に，ゼロでない二つの要素の内積がゼロになるとき，それらは「直交」しているという．(8.11) 式において抽象的な角度 θ が直角であると解釈するのである．

内積で測った「大きさ」や「角度」は，実際測れる具体的なものである必要はない．高校で習った矢印ベクトルの集合とその内積だけが，定規や分度器で測っている「大きさ」と「角度」に密接に関係している．だから実感しやすいのである．

二階のテンソルのように，矢印ベクトルとは全く異なる量の集合があって，そこに何らかの内積が定義されているときには，その集合における「大きさ」,「距離」,「直交」などはその内積によって測った抽象的なものにすぎない．しかし，内積という定規が違うだけで「大きさ」,「距離」,「直交」などの意味は矢印ベクトルと全く同じイメージで理解すれば良い．

2.1.3　行列式，デタミナント（determinant）

行列式の定義

二階のテンソル $\boldsymbol{A}$ の表現行列 $[A]$ について，

$$\det \boldsymbol{A} = \det[A] \equiv \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \tag{2.12}$$

を二階テンソル $\boldsymbol{A}$ および $[A]$ の行列式（determinant（デタミナント））という．

(8.12) 式は，$[A]$ の各行から一つずつ成分を抜き出したときの全ての組み合わせについて，選んだ列番号の順番 (i, j, k) から置換記号 ϵ_{ijk} によって符号を定めて積和を取ることを表している．置換記号 ϵ_{ijk} の性質 (1.22) 式から積和に寄与するのは (i, j, k) が異なる列番号の組み合わせだけであり，具体的に書き下せば以下のようになる．

$$\begin{aligned} \det[A] &\equiv \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \\ &= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} \\ &\quad - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} \end{aligned} \tag{2.13}$$

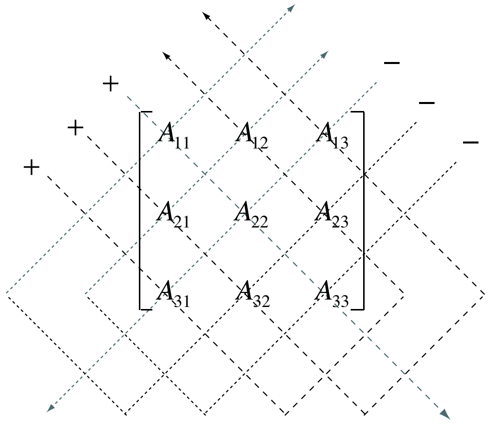

図 2.2: 行列式の計算方法（Sarrus の方法）

ここで，(8.16) 式右辺の各項を列番号に関して (1, 2, 3) の順に並べ替えてみると，

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} &= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{31}A_{12}A_{23} + A_{21}A_{32}A_{13}\\ &\quad - A_{21}A_{12}A_{33} - A_{11}A_{32}A_{23} - A_{31}A_{22}A_{13}\\ &= \epsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} = \det[A]^T \end{aligned} \tag{2.14}$$

が成立することがわかる．

$$\det[A] = \epsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} = \epsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} = \det[A]^T \tag{2.15}$$

この行列式の計算は図 8.2 のように示すことが出来る（Sarrus の方法）．左上から右下へ「たすきがけ」で成分を選んだときは正，逆に右上から左下の時は負にして，すべての組み合わせについて積和を取れば (8.12) 式になる．

また，定義式 (8.12) は，さらに 1,2,3 の指標の順列を考慮して

$$\det \boldsymbol{A} = \det[A] \equiv \frac{1}{6}\epsilon_{pqr}\epsilon_{ijk}A_{pi}A_{qj}A_{rk} \tag{2.16}$$

と表すこともできる．

スカラー三重積との関係

行列 $[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ の各 p 列を

$$\begin{Bmatrix} A_{1p} \\ A_{2p} \\ A_{3p} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_p = A_{1p}\boldsymbol{e}_1 + A_{2p}\boldsymbol{e}_2 + A_{3p}\boldsymbol{e}_3 = A_{ip}\boldsymbol{e}_i \ , \quad (p = 1, 2, 3) \tag{2.17}$$

のような三つのベクトルに見立てて，4.14.1 に説明しているベクトルのスカラー三重積を計算すると，

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3| = |A_{i1}\boldsymbol{e}_i, A_{j2}\boldsymbol{e}_j, A_{k3}\boldsymbol{e}_k| &= A_{i1}A_{j2}A_{k3}|\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k| \\ &= \epsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}|\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3| \\ &= \epsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} \end{aligned} \tag{2.18}$$

を得る．これは，(8.15) 式に見るとおり $\det[A]$ に他ならない．すなわち，行列 $[A]$ の行列式（デタミナント）は，$[A]$ の三つの列ベクトルのスカラー三重積である（$\det[A] = \det[A]^T$ だから，三つの行ベクトルのスカラー三重積でもある）．

この事実を踏まえると，行列の積について

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det([A][B]) = \det[A]\det[B] = \det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B} \tag{2.19}$$

が成立することが容易に説明できる．

まず，$[B]$ の列ベクトルを $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ とすると $\det\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3|$．また，行列積 $[A][B]$ の三つの列ベクトルは $\boldsymbol{Ab}_1$，$\boldsymbol{Ab}_2$，$\boldsymbol{Ab}_3$ となる．したがって $\det(\boldsymbol{AB})$ をスカラー三重積で表すと，

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{AB}) &= \det([A][B]) \\ &= |\boldsymbol{Ab}_1, \boldsymbol{Ab}_2, \boldsymbol{Ab}_3| \end{aligned} \tag{2.20}$$

であり，スカラー三重積について成り立つ (4.225) 式から次式を得る．

$$|\boldsymbol{Ab}_1, \boldsymbol{Ab}_2, \boldsymbol{Ab}_3| = \det\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3| = \det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B} \tag{2.21}$$

テンソル積の行列式は常にゼロ

$\det[A] = 0$ の時には逆行列が存在しないことは周知であるが[2]，ベクトルのテンソル積については常に行列式がゼロとなることを知っておこう．

[2]逆行列の存在，求め方については線形代数の教科書を参照のこと

実際,

$$\det(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) = \epsilon_{ijk}u_1v_iu_2v_ju_3v_k = u_1u_2u_3\epsilon_{ijk}v_iv_jv_k \tag{2.22}$$

であるが，ここで,

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}v_iv_jv_k &= \epsilon_{jik}v_jv_iv_k \quad (\because\ i, j \text{ はダミー指標だから同時に書き換え可}) \\ &= \epsilon_{jik}v_iv_jv_k \quad (\because\ v_jv_i = v_iv_j) \\ &= -\epsilon_{ijk}v_iv_jv_k \quad (\because\ \epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}) \\ \therefore\ \epsilon_{ijk}v_iv_jv_k &= 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

すなわち，$\det(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) = u_1u_2u_3\epsilon_{ijk}v_iv_jv_k = 0$ である．

任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})$ によって

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} \tag{2.24}$$

のように，$\boldsymbol{u}$ のスカラー倍のベクトルに変換される．すなわち，$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})$ は三次元空間を $\boldsymbol{u}$ が張る一次元空間に縮約してしまう線形変換作用素なのである．三次元を一次元に縮約してしまったら元には戻らない．$\det(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) = 0$ であり逆行列が存在しない背景にはそのような事情がある．

2.1.4　線形変換の合成，二階テンソルの積

二階のテンソル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ による線形変換があって，次のように $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{w}$ という二つの対応関係を与えているとする．

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\,, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{2.25}$$

このとき，$\boldsymbol{u}$ を直接 $\boldsymbol{w}$ と対応させる関係は二つの線形変換の合成変換として与えられるが，以下のとおり，それは二つのテンソルの積（テンソル積 $\otimes$ ではない!!）として表される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}) \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \therefore\ \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{2.26}$$

ここで，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ とおき，(1.32) 式を参照して計算を進めると次のようになる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} \quad \Longrightarrow \quad C_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) &= [A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)][B_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)] \\
&= A_{ij}B_{kl}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) \\
&= A_{ij}B_{kl}\delta_{jk}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l) \\
&= A_{ij}B_{jl}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l) \\
\therefore \quad C_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) &= A_{il}B_{lj}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

ここで，最後の (8.27) 式では，左辺に合わせて見やすくするために，その直前の式におけるダミー指標の j と l を入れ替えている．このように同じ指標の一組が入る場所さえ変わらなければダミー指標については入れ替えや文字の変更は自由である．

(8.27) 式から二階テンソルの積に対する指標表記と行列表現を得る．二つの二階テンソルの積の表現行列は，それぞれのテンソルの表現行列の積で与えられる．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} \;\Leftrightarrow\; C_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = A_{il}B_{lj}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \\
&\Longrightarrow \;\therefore\; C_{ij} = A_{ik}B_{kj} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

再び，見やすさのためにダミー指標を l から k に変えていることに注意.

2.1.5 二階テンソルとテンソル積

二階のテンソル $\boldsymbol{A}$ とテンソル積 $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})$ の積は，先に見た二階テンソルの積に他ならないが，この場合，二階テンソルの積とベクトルのテンソル積の間の結合則として次式が成立する．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) &= \left(A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\right)(a_k b_l(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)) = A_{ij}a_k\delta_{jk}b_l(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l) \\
&= \left(A_{ij}a_k\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i\right) \otimes (b_l\boldsymbol{e}_l) = \left(A_{ij}a_k(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_i\right) \otimes (b_l\boldsymbol{e}_l) \\
&= \left(A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(a_k\boldsymbol{e}_k)\right) \otimes (b_l\boldsymbol{e}_l) = (\boldsymbol{Aa}) \otimes \boldsymbol{b} \\
\therefore \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{Aa}) \otimes \boldsymbol{b}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\boldsymbol{A} &= \left(a_i b_j(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\right)(A_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)) = a_i b_j A_{kl}\delta_{jk}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l) \\
&= (a_i\boldsymbol{e}_i) \otimes \left(b_j A_{kl}\delta_{jk}\boldsymbol{e}_l\right) = (a_i\boldsymbol{e}_i) \otimes \left(b_j A_{kl}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_l\right) \\
&= (a_i\boldsymbol{e}_i) \otimes \left(A_{kl}(\boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}_k)(b_j\boldsymbol{e}_j)\right) = \boldsymbol{a} \otimes \left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}\right) \\
\therefore \quad (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{a} \otimes \left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}\right)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

2.1.6　変形勾配の転置テンソル $\boldsymbol{F}^T$ と逆テンソル $\boldsymbol{F}^{-1}$

転置テンソル $\boldsymbol{F}^T$

変形勾配テンソルの基底表示は

$$\boldsymbol{F} = F_{iJ}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J) = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J) \tag{2.31}$$

であり，その成分 F_{iJ} は

$$F_{iJ} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{F}\boldsymbol{E}_J \tag{2.32}$$

によって与えられる．ここで，転置テンソルの定義を用いると[3]，$\boldsymbol{F}^T$ の成分について次式が得られる．

$$\begin{aligned} F_{iJ} &= \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{F}\boldsymbol{E}_J \\ &= \boldsymbol{E}_J \cdot \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{e}_i = F^T_{Ji} \end{aligned} \tag{2.33}$$

この $F^T_{Ji} = F_{iJ}$ という関係から，$\boldsymbol{F}$ の表現行列を $[F]$ とすれば，$\boldsymbol{F}^T$ の表現行列は $[F]^T$ になることがわかる．また，この (8.33) 式に見る基底 $\boldsymbol{E}_J$ および $\boldsymbol{e}_i$ と成分 F^T_{Ji} の関係は，転置テンソル $\boldsymbol{F}^T$ の基底表示が

$$\boldsymbol{F}^T = F^T_{Ji}(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{e}_i) = F_{iJ}(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{e}_i) = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{e}_i) \tag{2.34}$$

であることを示唆する．実際，$\boldsymbol{F}^T$ がこのようであれば，任意の $\boldsymbol{Y} = Y_I\boldsymbol{E}_I$ と $\boldsymbol{y} = y_j\boldsymbol{e}_j$ について

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{y} &= (Y_I\boldsymbol{E}_I)\,(F_{kJ}(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{e}_k))\left(y_j\boldsymbol{e}_j\right) = y_jF_{jI}Y_I \\ &= \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{F}\boldsymbol{Y} \end{aligned} \tag{2.35}$$

のように転置テンソルの定義を満足する．すなわち，$\boldsymbol{F}^T$ の基底表示は確かに (8.34) 式である．

$\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{E}_I$ $(I = 1, 2, 3)$ を基底に持つ基準配置 B_0 から $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を基底とする現在配置 B_t への変換作用素であるのに対して，$\boldsymbol{F}^T$ はその逆の，現在配置 B_t から基準配置 B_0 への変換作用素として働く．

逆テンソル $\boldsymbol{F}^{-1}$

$\boldsymbol{F} = F_{iJ}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J)$ は，線形変換

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.36}$$

[3]転置テンソルの定義については 1 章 1.2.10 項を参照.

の作用素である．この逆変換は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.37}$$

だから，これを基底表示すると次式のようになる．

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_I\boldsymbol{E}_I &= F^{-1}_{Ik}\mathrm{d}x_k\boldsymbol{E}_I = F^{-1}_{Ij}\delta_{jk}\mathrm{d}x_k\boldsymbol{E}_I = F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k)\mathrm{d}x_k\boldsymbol{E}_I \\ &= \left(F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{e}_j)\right)(\mathrm{d}x_k\boldsymbol{e}_k) \end{aligned} \tag{2.38}$$

あるいは，$F^{-1}_{Ij} = \dfrac{\partial X_I}{\partial x_j}$ と書き直せば

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_I\boldsymbol{E}_I &= \frac{\partial X_I}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\boldsymbol{E}_I = \frac{\partial X_I}{\partial x_j}\delta_{jk}\mathrm{d}x_k\boldsymbol{E}_I = \frac{\partial X_I}{\partial x_j}(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k)\mathrm{d}x_k\boldsymbol{E}_I \\ &= \left(\frac{\partial X_I}{\partial x_j}(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{e}_j)\right)(\mathrm{d}x_k\boldsymbol{e}_k) \end{aligned} \tag{2.39}$$

である．これらの式から $\boldsymbol{F}^{-1}$ の基底表示は

$$\boldsymbol{F}^{-1} = F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{e}_j) = \frac{\partial X_I}{\partial x_j}(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{e}_j) \tag{2.40}$$

であることがわかる．実際，$\boldsymbol{F}^{-1}$ の基底表示がこのようであれば，$\boldsymbol{F}$ との積は次のように確かに逆テンソルの条件を満たす．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1} &= (F_{iJ}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{E}_J))\left(F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{e}_j)\right) = F_{iJ}F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{E}_J\cdot\boldsymbol{E}_I)(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) \\ &= F_{iJ}F^{-1}_{Ij}\delta_{JI}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) = F_{iJ}F^{-1}_{Jj}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial X_J}\frac{\partial X_J}{\partial x_j}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) \\ &= \delta_{ij}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{I}_e \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F} &= \left(F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{e}_j)\right)(F_{iJ}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{E}_J)) = F^{-1}_{Ij}F_{iJ}(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{E}_J) \\ &= F^{-1}_{Ij}F_{iJ}\delta_{ji}(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{E}_J) = F^{-1}_{Ij}F_{jJ}(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{E}_J) \\ &= \frac{\partial X_I}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_J}(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{E}_J) = \frac{\partial X_I}{\partial X_J}(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{E}_J) \\ &= \delta_{IJ}(\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{E}_J) = \boldsymbol{I}_E \end{aligned} \tag{2.42}$$

$\boldsymbol{F}^{-1}$ は $\boldsymbol{F}$ とは逆の $\boldsymbol{e}_i$-系である現在配置 B_t から $\boldsymbol{E}_I$-系の基準配置 B_0 への変換を与えるが，基底表示 (8.40) 式はそのことを明確に示している．

2.2　ベクトルと二階テンソルの座標変換則

正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ によるデカルト座標系（x_i-系）では，ベクトル $\boldsymbol{u}$ および二階のテンソル $\boldsymbol{A}$ は

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad u_i = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_i, \qquad [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j \tag{2.43}$$

で表される．ところが，別の正規直交基底 $\left[\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\right]$ を持つ新しい座標系（x'_i-系）では違った顔になり，

$$\{u'\} = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{Bmatrix}, \quad u'_i = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}'_i, \qquad [A'] = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} \end{bmatrix}, \quad A'_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}'_j \tag{2.44}$$

のように表現される．このように x_i-系から x'_i-系へと座標系を変えたとき，古い顔は新しい顔に変わるのだが，その変わり方は座標変換則に従う．ここでは，x_i，x'_i-系ともに正規直交系の場合の座標変換則について説明する．

2.2.1　基底の変換，座標変換行列

座標変換とは基底の変更に他ならず，その新旧の基底の関係が座標変換則を与える．

新しい基底 $[\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3]$ の三つのベクトルは，当然のことながら，いま参照している古い基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ の一次結合として次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= (\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 = T_{11}\boldsymbol{e}_1 + T_{12}\boldsymbol{e}_2 + T_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 &= (\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 = T_{21}\boldsymbol{e}_1 + T_{22}\boldsymbol{e}_2 + T_{23}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 &= (\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 = T_{31}\boldsymbol{e}_1 + T_{32}\boldsymbol{e}_2 + T_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{2.45}$$

これを指標を用いてまとめて表せば

$$\boldsymbol{e}'_i = T_{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad T_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{2.46}$$

である．そして，T_{ij} を行列表現すれば，

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_3) \\ (\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_3) \\ (\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

である．新旧の基底の間の内積で決まるこの $[T]$ を座標変換行列という．

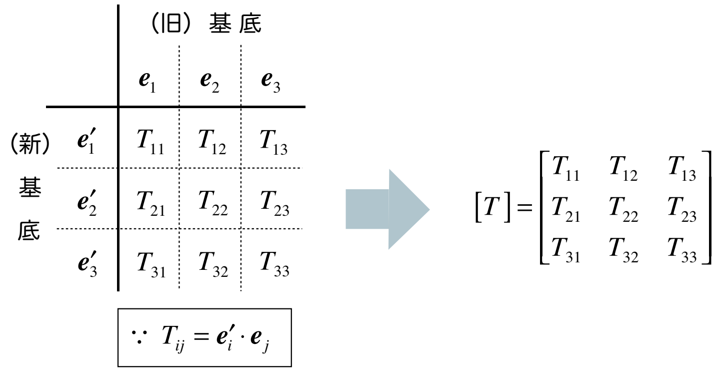

図 2.3: 座標変換行列 $[T]$ の作り方

図 8.3 には，この正規直交系から正規直交系への座標変換行列 $[T]$ の作り方を示している．横に旧基底，縦に新基底を並べて表を作り，それぞれの升目に互いを参照したときの成分を書き込めば座標変換行列 $[T]$ ができる．

この作り方からわかるように，$[T]$ の中で横に並んだ三つの行ベクトルは旧基底を参照したときの新基底の成分を並べた三つの数ベクトルであり，逆に，縦に並ぶ三つの列ベクトルは新基底を参照したときの旧基底の成分の三つの数ベクトルである．

$$[T] = \begin{bmatrix} \{ & e'_1 & \} \\ \{ & e'_2 & \} \\ \{ & e'_3 & \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} \\ e_1 \\ \\ \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \\ e_2 \\ \\ \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \\ e_3 \\ \\ \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

そして，新基底も旧基底も正規直交系なのだから，列ベクトルの組，行ベクトルの組はそれぞれ数ベクトルとして正規直交系を成す．すなわち，次のような関係式が成立する．

$$[T][T]^T = \begin{bmatrix} \{ & e'_1 & \} \\ \{ & e'_2 & \} \\ \{ & e'_3 & \} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} \\ e'_1 \\ \\ \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \\ e'_2 \\ \\ \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \\ e'_3 \\ \\ \end{Bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1) & (\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2) & (\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_3) \\ (\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}'_1) & (\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}'_2) & (\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}'_3) \\ (\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}'_1) & (\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}'_2) & (\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}'_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \tag{2.49}$$

$$[T]^T[T] = \begin{bmatrix} \{ & e_1 & \} \\ \{ & e_2 & \} \\ \{ & e_3 & \} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} \\ e_1 \\ \\ \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \\ e_2 \\ \\ \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \\ e_3 \\ \\ \end{Bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3) \\ (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3) \\ (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \tag{2.50}$$

このことは，座標変換行列 $[T]$ の転置行列が逆行列であること

$$[T]^{-1} = [T]^T \tag{2.51}$$

を示している．(8.51) 式を満たす行列を直交行列という．こうして，正規直交系から正規直交系への座標変換行列 $[T]$ は必ず直交行列になる．

2.2.2　ベクトル（数ベクトル）の座標変換

ベクトル $\boldsymbol{u}$ は x_i-系と x'_i-系において，それぞれ

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = u_i\boldsymbol{e}_i \tag{2.52}$$

$$\boldsymbol{u} = u'_1\boldsymbol{e}'_1 + u'_2\boldsymbol{e}'_2 + u'_3\boldsymbol{e}'_3 = u'_j\boldsymbol{e}'_j \tag{2.53}$$

と表される．ここで，(8.53) 式の基底を (8.46) 式の関係を使って新しい基底に書き換えると

$$\boldsymbol{u} = u'_j\boldsymbol{e}'_j = u'_jT_{jk}\boldsymbol{e}_k = u'_jT_{ji}\boldsymbol{e}_i \tag{2.54}$$

を得る．これと (8.52) 式を比較すると，同じ基底 $\boldsymbol{e}_i$ に対応する成分は一致せねばならないから次の関係式を得る．

$$u_i = u'_jT_{ji} = T_{ji}u'_j$$

この式を行列表現すれば，

$$\{u\} = [T]^T\{u'\}$$

となる．さらに，$[T]^T = [T]^{-1}$ だから両辺の左から $[T]$ を作用させれば

$$\{u'\} = [T]\{u\}$$

を得る．そして，これを再び指標で表せば

$$u'_i = T_{ij}u_j$$

となる．

以上を整理すれば，ベクトルの座標変換則が次のように得られる．

$$u'_i = T_{ij}u_j\ , \quad \{u'\} = [T]\{u\} \tag{2.55}$$

$$u_i = T_{ji}u'_j\ , \quad \{u\} = [T]^T\{u'\} \tag{2.56}$$

x_i-系から x'_i-系へ座標系を変えるとき，座標変換行列 $[T]$ を (8.47) 式に従って構成し，それを用いて古い顔 $\{u\}$ を変換すれば新しい顔 $\{u'\}$ がわかる．そして，逆関係には $[T]$ が直交行列だからその転置行列を用いればよい．

2.2.3　二階テンソル（行列）の座標変換

二階テンソル $\boldsymbol{A}$ は x_i-系と x'_i-系において，それぞれの基底を用いて

$$\boldsymbol{A} = A_{ij}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right)\ , \quad A_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j \tag{2.57}$$

$$\boldsymbol{A} = A'_{ij}\left(\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j\right)\ , \quad A'_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}'_j \tag{2.58}$$

と表される．この成分 A_{ij} および A'_{ij} を行列に表した

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad [A'] = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} \end{bmatrix}$$

のことを，二階テンソル $\boldsymbol{A}$ のそれぞれ x_i-系および x'_i-系における表現行列ということは先に述べた．

ここで新旧の基底の関係式 (8.46) を用いて (8.58) 式を書き換えると次のようになる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= A'_{ij}\left(\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j\right) = A'_{ij}\left(T_{ip}\boldsymbol{e}_p \otimes T_{jq}\boldsymbol{e}_q\right) \\ &= T_{ip}A'_{ij}T_{jq}\left(\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q\right) \end{aligned} \tag{2.59}$$

一方，(8.57) 式の基底を $\left(\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q\right)$ に書き換えれば

$$\boldsymbol{A} = A_{pq}\left(\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q\right) \tag{2.60}$$

であるが，同じ基底に対する成分は等しいことから，(8.59) 式と比較して

$$A_{pq} = T_{ip}A'_{ij}T_{jq}\ , \quad [A] = [T]^T[A'][T]$$

を得る．さらに，左から $[T]$，右から $[T]^t$ を両辺に作用させて

$$[A'] = [T][A][T]^T\ , \quad A'_{ij} = T_{ip}A_{pq}T_{jq}$$

を得る．

以上から，二階テンソルの座標変換則は次式で与えられることになる．

$$A'_{ij} = T_{ip}A_{pq}T_{jq}\ , \quad [A'] = [T][A][T]^T \tag{2.61}$$

$$A_{ij} = T_{pi}A'_{pq}T_{qj}\ , \quad [A] = [T]^T[A'][T] \tag{2.62}$$

x_i-系から x'_i-系へ座標系を変えるとき，座標変換行列 $[T]$ を (8.47) 式に従って構成し，古い顔 $[A]$ を両側から $[T]$ および $[T]^T$ で挟んで変換すると新しい顔 $[A']$ が得られる．逆の関係では $[T]$ と $[T]^T$ を入れ替えればよい．二階のテンソルは方向の情報を二つ含んでおり，それを変換せねばならないので座標変換行列は両側から二つ作用させる必要がある．

2.2.4　恒等テンソル $\boldsymbol{I}$ による座標変換過程の記述

以上に見てきた座標変換の様子は，恒等テンソル $\boldsymbol{I}$ を用いて次のように記述することができる．

恒等テンソル $\boldsymbol{I}$ は，任意の正規直交基底によって

$$\boldsymbol{I} = \delta_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}(\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j) \tag{2.63}$$

と表される．

今，基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ で表されたベクトル $\boldsymbol{u} = u_k\boldsymbol{e}_k$ に，基底 $[\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3]$ で表した恒等テンソルを作用させる．すると，(8.46) 式から $\boldsymbol{e}'_j \cdot \boldsymbol{e}_k = T_{jk}$ だから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{u} &= \left(\delta_{ij}(\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j)\right)(u_k\boldsymbol{e}_k)\\ &= \delta_{ij}u_k\boldsymbol{e}'_i(\boldsymbol{e}'_j \cdot \boldsymbol{e}_k) = \delta_{ij}u_kT_{jk}\boldsymbol{e}'_i\\ &= T_{ik}u_k\boldsymbol{e}'_i\end{aligned} \tag{2.64}$$

を得て，最後の基底 $[\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3]$ による表現から，(8.55) 式の関係

$$u'_i = T_{ij}u_j\ , \quad \{u'\} = [T]\{u\} \tag{2.65}$$

を得る．同様に，$\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{u}$ の基底を変えれば (8.56) 式が得られる．

二階テンソルの座標変換も同じである．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I} &= \left(\delta_{ik}(\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_k)\right)(A_{lm}(\boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}_m))\left(\delta_{nj}(\boldsymbol{e}'_n \otimes \boldsymbol{e}'_j)\right)\\ &= \delta_{ik}A_{lm}\delta_{nj}(\boldsymbol{e}'_k \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}'_n)(\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j)\\ &= \delta_{ik}A_{lm}\delta_{nj}T_{kl}T_{nm}(\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j)\\ &= T_{il}T_{jm}A_{lm}(\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j)\end{aligned} \tag{2.66}$$

最後の基底 $[\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3]$ による表現から，(8.61) 式の関係

$$A'_{ij} = T_{ip}A_{pq}T_{jq}\ , \quad [A'] = [T][A][T]^T \tag{2.67}$$

を得る．(8.62) 式は $\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{A}$ の基底を変えれば得られる．

2.2.5　不変量

ベクトルや二階テンソルは，座標系が変わればそれらを表す表現行列が変わる[4]．ところが，これらには座標を変えても変わらないスカラー量が付随している．それを不変量という．

[4] 8.2.2，8.2.3 項を参照．

あるベクトルの長さが座標変換によって変わることはない．すなわち．内積で定義されるベクトル $\boldsymbol{u}$ の長さ（ノルム）は不変量である．実際，(8.55) 式を用いると，次に示すように，$\|\boldsymbol{u}\|$ はどの座標系において計算しても不変であることが確かめられる．

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = \{u'\}^T\{u'\} = ([T]\{u\})^T([T]\{u\}) = \{u\}^T[T]^T[T]\{u\} = \{u\}^T[I]\{u\} = \{u\}^T\{u\} \tag{2.68}$$

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = u'_i u'_i = T_{ik}u_k T_{il}u_l = u_k T_{ik}T_{il}u_l = u_k\delta_{kl}u_l = u_k u_k \tag{2.69}$$

二階テンソル $\boldsymbol{A}$ については，まずはトレース（表現行列の対角項の和）が不変量である．

ここで，トレース演算については以下が成立することを改めて確認しておく．

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{A} = \delta_{ij}A_{ij} = A_{ii} = \mathrm{tr}[A] \tag{2.70}$$

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{A}^T = \delta_{ij}A_{ji} = A_{ii} = \mathrm{tr}[A] = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{AB}) &= \boldsymbol{I} : \boldsymbol{AB} = \delta_{ij}A_{ik}B_{kj} = A_{ik}B_{ki} = \mathrm{tr}\,([A][B]) \\ &= B_{ki}A_{ik} = \mathrm{tr}\,([B][A]) = \delta_{kl}B_{ki}A_{il} = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{BA} = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{BA})\end{aligned} \tag{2.72}$$

これらの関係を用いて，次のようにトレースはどの座標系において計算しても不変である（表現行列に依存しない）ことが示される．

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{tr}[A'] = \mathrm{tr}\left([T][A][T]^T\right) = \mathrm{tr}\left([T]^T[T][A]\right) = \mathrm{tr}\,([I][A]) = \mathrm{tr}[A] \tag{2.73}$$

もちろん，このことは指標表記を用いて示すこともできる．実際，$[T]^T[T] = [I]$ だから $T_{ik}T_{il} = \delta_{kl}$ であることに注意すれば

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = A'_{ii} = \delta_{ij}A'_{ij} = \delta_{ij}T_{ik}A_{kl}T_{jl} = T_{ik}T_{il}A_{kl} = \delta_{kl}A_{kl} = A_{kk} \tag{2.74}$$

すなわち，座標系が変わっても $A'_{ii} = A_{kk}$ であることが示される．．$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$ は成分に関する一次式なので一次の基本不変量とも言われる．

二次の基本不変量は次式で与えられる．

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^2 = \mathrm{tr}[A]^2 = A_{ij}A_{ji} \tag{2.75}$$

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right) = \mathrm{tr}\left([A]^T[A]\right) = A_{ij}A_{ij} \tag{2.76}$$

これらが座標系に関係なく不変であることは次のとおり．

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^2 = \mathrm{tr}[A']^2 = \mathrm{tr}\left([T][A][T]^T[T][A][T]^T\right) = \mathrm{tr}\left([T][A]^2[T]^T\right) = \mathrm{tr}\left([T]^T[T][A]^2\right) = \mathrm{tr}[A]^2 \tag{2.77}$$

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right) = \mathrm{tr}\left([A']^T[A']\right) = \mathrm{tr}\left([T][A]^T[T]^T[T][A][T]^T\right) = \mathrm{tr}\left([T]^T[T][A]^T[A]\right) = \mathrm{tr}\left([A]^T[A]\right) \tag{2.78}$$

また，行列式（デタミナント）は三次の基本不変量である．実際，(8.19) 式から

$$\det[I] = \det\left([T]^T[T]\right) = \det[T]^T \det[T] = 1$$
$$\therefore \quad \det[T]^T = \frac{1}{\det[T]} \tag{2.79}$$

が成り立つから，

$$\det \boldsymbol{A} = \det[A'] = \det\left([T][A][T]^T\right) = \det[T]\det[A]\frac{1}{\det[T]} = \det[A] \tag{2.80}$$

である．

$\boldsymbol{A}$ が対称テンソルのときは固有方向に正規直交座標を選ぶことができる．その固有方向に座標変換を施しても不変量は当然不変である．そして，固有方向においては $\boldsymbol{A}$ の表現行列は

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

のように固有値 λ_1，λ_2，λ_3 が並んだ対角行列になるから[5]，$\boldsymbol{A}$ の不変量は固有値を用いて以下のように簡単に表されることがわかる．

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{tr}[A] = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \tag{2.82}$$

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^2 = \mathrm{tr}[A]^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \tag{2.83}$$

$$\det \boldsymbol{A} = \det[A] = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{2.84}$$

2.3　ベクトル場と二階テンソル場の勾配，発散

2.3.1　ベクトル場，二階テンソル場の勾配

スカラー場と同様，空間内のある領域 Ω において，位置 $\boldsymbol{x}$ を指定するとベクトル $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ がただ一つ定まるとき，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ を Ω を定義域とするベクトル場という．ベクトル場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ は，直交デカルト座標系においては

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + u_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + u_3(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_3 = u_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i \quad \Longrightarrow \quad \therefore \; u_i(\boldsymbol{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_1(\boldsymbol{x}) \\ u_2(\boldsymbol{x}) \\ u_3(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} \tag{2.85}$$

と表され，各成分がスカラー場 $u_i(\boldsymbol{x}) = u_i(x_1, x_2, x_3)$ をなす空間のベクトル値関数である．

[5]行列の対角化については 3 章の道具箱 3.9.4 項を参照.

ベクトル場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ の全微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}u_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}u_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}u_3(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_3 = \mathrm{d}u_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i \implies \therefore\ \mathrm{d}u_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathrm{d}u_1(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{d}u_2(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{d}u_3(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} \tag{2.86}$$

であり，各成分 $\mathrm{d}u_i$ は (1.81) 式の二次元の場合を三次元に拡張して

$$\mathrm{d}u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \tag{2.87}$$

と表される．したがって，(8.86) 式は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\boldsymbol{e}_3 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\boldsymbol{e}_i \tag{2.88}$$

となる．これから

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta_{jk}\mathrm{d}x_k\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k)\mathrm{d}x_k\boldsymbol{e}_i \\
&= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\,(\mathrm{d}x_k\boldsymbol{e}_k) \\
&= (\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

すなわち，ベクトル場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ の勾配は $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ をベクトル場の全微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ に変換する線形変換作用素としての二階テンソルになる．本書では次のような表記を適宜用いる．

$$\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u} = \nabla_x\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \implies \therefore\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

同様に，二階テンソル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ は，直交デカルト座標系においては

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = A_{ij}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \implies \therefore\ A_{ij}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11}(\boldsymbol{x}) & A_{12}(\boldsymbol{x}) & A_{13}(\boldsymbol{x}) \\ A_{21}(\boldsymbol{x}) & A_{22}(\boldsymbol{x}) & A_{23}(\boldsymbol{x}) \\ A_{31}(\boldsymbol{x}) & A_{32}(\boldsymbol{x}) & A_{33}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

と表され，各成分がスカラー場 $A_{ij}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}) = A_{ij}(\boldsymbol{x})(x_1, x_2, x_3)$ をなす空間の二階テンソル値関数である．そして，テンソル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の全微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}A_{ij}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \implies \therefore\ \mathrm{d}A_{ij}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{d}A_{11}(\boldsymbol{x}) & \mathrm{d}A_{12}(\boldsymbol{x}) & \mathrm{d}A_{13}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{d}A_{21}(\boldsymbol{x}) & \mathrm{d}A_{22}(\boldsymbol{x}) & \mathrm{d}A_{23}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{d}A_{31}(\boldsymbol{x}) & \mathrm{d}A_{32}(\boldsymbol{x}) & \mathrm{d}A_{33}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

である．各成分 $\mathrm{d}A_{ij}$ は $\mathrm{d}u_i$ と同様,

$$\mathrm{d}A_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k \tag{2.93}$$

となるので，これから

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\delta_{kl}\mathrm{d}x_l(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l)\mathrm{d}x_l(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\\
&= \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k)(\mathrm{d}x_l\boldsymbol{e}_l)\\
&= (\mathrm{grad}\,\boldsymbol{A})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

を得る．二階テンソル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の勾配は，このように $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ を二階テンソルの全微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ に対応させる 3 階のテンソルになる．

2.3.2　二階テンソルのデタミナントの勾配

スカラー三重積の方向微分による導出

スカラー三重積[6]を用いても上とほぼ同じ誘導ができる．いま，同一平面にはない任意の三つの定ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ を固定して，二階テンソル $\boldsymbol{A}$ のスカラー値関数を

$$H(\boldsymbol{A}) \equiv |\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3| = (\det \boldsymbol{A})|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3| \tag{2.95}$$

と定義する．すると，この $H(\boldsymbol{A})$ の任意の $\Delta\boldsymbol{A}$ 方向への方向微分は

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}H(\boldsymbol{A})[\Delta A] &= \left.\frac{\mathrm{d}H(\boldsymbol{A} + h\Delta\boldsymbol{A})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0}\\
&= \left.\frac{\mathrm{d}\,(\det(\boldsymbol{A} + h\Delta\boldsymbol{A}))}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|\\
&= \left(\frac{\partial\,(\det \boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}} : \Delta\boldsymbol{A}\right)|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|
\end{aligned} \tag{2.96}$$

で与えられる．ここで，スカラー三重積の性質を利用すると，右辺第一式は以下のように展開できる．

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}H(\boldsymbol{A} + h\Delta\boldsymbol{A})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[\,|(\boldsymbol{A} + h\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{a}_1, (\boldsymbol{A} + h\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{a}_2, (\boldsymbol{A} + h\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{a}_3|\,\right]_{h=0}\\
&= |(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3| + |\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1, (\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3| + |\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2, (\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{a}_3|\\
&= |(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3| + |\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1, (\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3| + |\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2, (\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3|\\
&= \mathrm{tr}\left((\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right)|\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3| = \mathrm{tr}\left((\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right)(\det \boldsymbol{A})|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|\\
&= (\det \boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{A}^{-T} : \Delta\boldsymbol{A}\right)|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|
\end{aligned} \tag{2.97}$$

[6] 4 章の道具箱 4.14.1 項を参照.

この結果を (8.96) 式に戻せば

$$\frac{\partial\,(\det \boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-T} \tag{2.98}$$

を得る．

方向微分による導出

二階テンソルのデタミナント $\det \boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{A}$ に関する勾配は，任意の $\Delta\boldsymbol{A}$ 方向への方向微分[7]によって次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\det \boldsymbol{A})[\Delta\boldsymbol{A}] &= \left.\frac{\mathrm{d}\,(\det(\boldsymbol{A}+h\Delta\boldsymbol{A}))}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} \\
&= \frac{\partial\,(\det \boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}} : \Delta\boldsymbol{A}
\end{aligned} \tag{2.99}$$

ここで，右辺第一式の分子にある $\det(\boldsymbol{A}+h\Delta\boldsymbol{A})$ は以下のように書き換えられる[8]．

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}+h\Delta\boldsymbol{A}) &= \det\left[\left(\boldsymbol{I}+h(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{A}\right] \\
&= (\det \boldsymbol{A})\det\left(\boldsymbol{I}+h(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right)
\end{aligned} \tag{2.100}$$

ここで，$\det\left(\boldsymbol{I}+h(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right)$ は，$h(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$ の固有方程式 $\det\left(h(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}-\lambda\boldsymbol{I}\right)$ において $\lambda=-1$ とした場合に相当する．そこで，$\boldsymbol{B}=(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$ の固有値を μ_i $(i=1,2,3)$ とすれば

$$\det\left(h(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}-\lambda\boldsymbol{I}\right) = \det(h\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I}) = (h\mu_1-\lambda)(h\mu_2-\lambda)(h\mu_3-\lambda) \tag{2.101}$$

と表せるから，$\lambda=-1$ として

$$\det\left(\boldsymbol{I}+h(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \det\left(h(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}-(-1)\boldsymbol{I}\right) = (h\mu_1+1)(h\mu_2+1)(h\mu_3+1) \tag{2.102}$$

を得る．(8.100)，(8.102) 式を (8.99) 式に戻すと

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\det \boldsymbol{A})[\Delta\boldsymbol{A}] &= \frac{\partial\,(\det \boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}} : \Delta\boldsymbol{A} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}\,(\det(\boldsymbol{A}+h\Delta\boldsymbol{A}))}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} \\
&= (\det \boldsymbol{A})\left.\frac{\mathrm{d}\,[(h\mu_1+1)(h\mu_2+1)(h\mu_3+1)]}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} \\
&= (\det \boldsymbol{A})(\mu_1+\mu_2+\mu_3) = (\det \boldsymbol{A})\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B} = (\det \boldsymbol{A})\,\mathrm{tr}\left((\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right) \\
&= (\det \boldsymbol{A})\left((\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1} : \boldsymbol{I}\right) \\
&= (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-T} : \Delta\boldsymbol{A}
\end{aligned} \tag{2.103}$$

[7] 8.4 節を参照．
[8] $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$ である．8.1.3 項を参照

を得る[9]．したがって，(8.99) 式と (8.103) 式を比較し，$\Delta\boldsymbol{A}$ が任意であることを考慮すると，$\det\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{A}$ に関する勾配は

$$\frac{\partial(\det\boldsymbol{A})}{\partial\boldsymbol{A}} = (\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-T} \tag{2.104}$$

であることが導かれる．

2.3.3　二階テンソルの逆テンソルの勾配

二階テンソル $\boldsymbol{A}$ の逆テンソル $\boldsymbol{A}^{-1}$ の $\boldsymbol{A}$ に関する勾配は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ であることを利用して，やはり任意の $\Delta\boldsymbol{A}$ 方向への方向微分によって次のように与えられる．

まず，

$$\boldsymbol{0} = \mathrm{D}(\boldsymbol{I})[\Delta\boldsymbol{A}] = \mathrm{D}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})[\Delta\boldsymbol{A}] = (\mathrm{D}(\boldsymbol{A})[\Delta\boldsymbol{A}])\,\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{A}\left(\mathrm{D}(\boldsymbol{A}^{-1})[\Delta\boldsymbol{A}]\right) \tag{2.105}$$

より，

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{A}^{-1})[\Delta\boldsymbol{A}] = \frac{\partial\boldsymbol{A}^{-1}}{\partial\boldsymbol{A}} : \Delta\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{-1}\,(\mathrm{D}(\boldsymbol{A})[\Delta\boldsymbol{A}])\,\boldsymbol{A}^{-1} \tag{2.106}$$

である．そして，

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{A})[\Delta\boldsymbol{A}] = \left.\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{A} + h\Delta\boldsymbol{A})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = \Delta\boldsymbol{A} \tag{2.107}$$

だから，(8.106) 式に返すと

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}^{-1}}{\partial\boldsymbol{A}} : \Delta\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{-1}(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1} \tag{2.108}$$

となる．ここで，(8.108) 式の両辺を基底表示すると

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}^{-1}}{\partial\boldsymbol{A}} : \Delta\boldsymbol{A} = \frac{\partial A^{-1}_{ij}}{\partial A_{kl}}(\Delta A)_{kl}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) = \left(\frac{\partial A^{-1}_{ij}}{\partial A_{kl}}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l)\right) : ((\Delta A)_{mn}(\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{e}_n)) \tag{2.109}$$

$$-\boldsymbol{A}^{-1}(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1} = -A^{-1}_{ik}(\Delta A)_{kl}A^{-1}_{lj}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) = \left(-A^{-1}_{ik}A^{-1}_{lj}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l)\right) : ((\Delta A)_{mn}(\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{e}_n)) \tag{2.110}$$

を得る．したがって，

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}^{-1}}{\partial\boldsymbol{A}} = \frac{\partial A^{-1}_{ij}}{\partial A_{kl}}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l) = -A^{-1}_{ik}A^{-1}_{lj}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l) \tag{2.111}$$

$$\frac{\partial A^{-1}_{ij}}{\partial A_{kl}} = -A^{-1}_{ik}A^{-1}_{lj} \tag{2.112}$$

である．ただし，両辺の指標の順番に注意が必要である．

[9] $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{B}$ の一次不変量．固有値で表せば $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ である．8.2.5 項を参照．また，トレース演算の性質と二階テンソルの積と内積の関係 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} : \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^T$ から，

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{G} : \boldsymbol{I} = \boldsymbol{G} : \boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{H} : \boldsymbol{G}^T = H_{ij}G_{ji}$$

である．

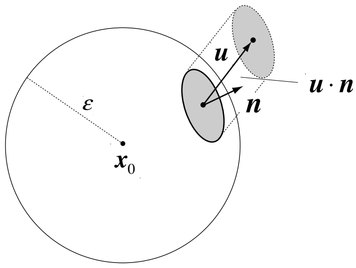

図 2.4: 球形領域表面からの流出

2.3.4 発散 (divergence)

ベクトル場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ の発散（divergence）は次式で定義される．

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{2.113}$$

ベクトル場の発散はスカラー（実数）になる．式から明らかなように，それは (8.90) 式にみる行列の対角項の和に等しい．

いま，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ を何らかの流体の流速ベクトルとしよう．この流れの中に任意点 $\boldsymbol{x}_0$ を中心に半径 ϵ の球形領域 V_ϵ を取り，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ の発散の積分

$$I_\varepsilon = \int_{V_\epsilon} \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}V \tag{2.114}$$

を考える．すると，Gauss の発散定理[10]から，$\boldsymbol{n}$ を V_ε の表面 ∂V_ϵ に立てた外向き法線として

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{V_\varepsilon} \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}V = \int_{V_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}V \\ &= \int_{\partial V_\epsilon} (u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3)\,\mathrm{d}S \\ &= \int_{\partial V_\varepsilon} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{2.115}$$

が成立する．これは，発散の積分値 I_ϵ が球形領域の境界面 ∂V_ε から単位時間当たりに流れ出る液体の体積に他ならないことを示している（図 8.4）．半径 ϵ をどんどん小さくするならば，積分値 I_ε は中心点 $\boldsymbol{x}_0$ から外へ向かって湧き出すように流れ出す液体の体積になると考えて良い．すなわち，ベクトル場の発散とは，こうした各点からのベクトル量の**湧き出し**を表している[11]．

[10]Gauss の発散定理については 5 章の道具箱 5.4.2 を参照のこと．
[11]5 章 5.1.1 項の脚注 3 に説明している連続の式と密接に関係している．

テンソル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の発散は次式に表すようなベクトルである．第 i 成分は (8.91) 式の行列の第 i 行ベクトルの発散になっている．

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} \equiv \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \quad \Longrightarrow \quad \therefore \ \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_{13}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_{23}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \tag{2.116}$$

2.4　方向微分，Gateaux 微分，汎関数の変分

2.4.1　方向微分

スカラー場 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$ について，点 $\boldsymbol{x}$ における次のような定ベクトル $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}^T$ 方向の変化を考える．

$$Df(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{a}] \equiv \lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+ha_1, x_2+ha_2, x_3+ha_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} \tag{2.117}$$

これを点 $\boldsymbol{x}$ における $\boldsymbol{a}$ 方向の方向微分（方向微係数）という．点 $\boldsymbol{x}$ が任意点で特に強調する必要がなければ省略して $Df(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{a}] = Df[\boldsymbol{a}]$ と表す．

$\psi(h) = f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{a})$ とおいて h の関数と見れば，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\psi(h) - \psi(0)}{h} = \psi'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} \tag{2.118}$$

だから，$\boldsymbol{x}(h) = \boldsymbol{x} + h\boldsymbol{a}$ として微分法の連鎖律を適用すると

$$\begin{aligned} Df(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{a}] &= \left.\frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}(h))}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = \left.\frac{\mathrm{d}f(x_1(h), x_2(h), x_3(h))}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1(h)}{\mathrm{d}h} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2(h)}{\mathrm{d}h} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}x_3(h)}{\mathrm{d}h}\right)_{h=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}a_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}a_3 \\ &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{a} = \nabla_x\cdot\boldsymbol{a} \end{aligned} \tag{2.119}$$

が得られる．すなわち，$\boldsymbol{x}$ における $\boldsymbol{a}$ 方向の方向微分 $Df(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{a}]$ は，$\boldsymbol{x}$ における勾配ベクトル ∇_x と定ベクトル $\boldsymbol{a}$ との内積で与えられる．

ベクトル場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ やテンソル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の方向微分は，それらの各成分 $u_i(\boldsymbol{x})$ や $A_{ij}(\boldsymbol{x})$ がスカラー場を成すから，1 章 1.3.1 項と同様の議論により，それぞれの $\boldsymbol{x}$ における勾配と定ベクトル $\boldsymbol{a}$ によっ

て次のように与えられる．

$$D\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{a}] \equiv \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}{h} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}a_j\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(a_k\boldsymbol{e}_k) \tag{2.120}$$

$$D\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{a}] \equiv \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})}{h} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}a_k(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k)(a_l\boldsymbol{e}_l) \tag{2.121}$$

物質時間微分と方向微分

ある物理量 $G(\boldsymbol{X},t)$ の空間表示が，次のように時間 t には空間の位置 $\boldsymbol{x}$ を通してのみ関係し，

$$G(\boldsymbol{X},t) = g(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)) \tag{2.122}$$

と表される場合，物理量 $G(\boldsymbol{X},t) = g(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t))$ の物質時間微分は物質点 $\boldsymbol{X}$ の速度 $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分に一致する．すなわち，

$$\dot{G}(\boldsymbol{X},t) = \dot{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{D}g(\boldsymbol{x})}{\mathrm{D}t} = \mathrm{D}g(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}] \tag{2.123}$$

が成立する．

実際，g の物質時間微分は

$$\dot{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{D}g(\boldsymbol{x})}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{v} \quad (\because\ \frac{\partial g}{\partial t} = 0) \tag{2.124}$$

のように，g が直接 t の関数ではないので時間 t による偏微分の項が消える．一方，速度 $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は，定義式 (8.119) から

$$\mathrm{D}g(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}] = \left.\frac{\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2.125}$$

だから，(8.124) 式と比較して，

$$\dot{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{D}g(\boldsymbol{x})}{\mathrm{D}t} = \mathrm{D}g(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}] = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2.126}$$

である．

空間表示の関数を物質時間微分したときに現れる移流項とは，物質点と一緒に $\boldsymbol{v}$ 方向へ移動する時の変化率だから，それは g の $\boldsymbol{v}$ 方向への方向微分に他ならない．

2.4.2　Gateaux 微分

関数 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ のそのまた関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})$ を汎関数という．$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ および汎関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})$ は，それぞれがスカラー値，ベクトル値，テンソル値の様々な場合がある．

この汎関数のような関数の方向微分についても，上に述べた三次元空間を定義域とする関数のそれを拡張して

$$\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{g}] \equiv \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}+h\boldsymbol{g})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})}{h} \tag{2.127}$$

と定義する．これを $\boldsymbol{F}$ の $\boldsymbol{w}$ における $\boldsymbol{g}$ 方向への Gateaux（ガトー）微分という．この $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{g}]$ が任意の $\boldsymbol{g}$ について存在し，かつ $\boldsymbol{g}$ に関して線形であるとき，$\boldsymbol{F}$ は Gateaux 微分可能であると言う．そして，$\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{g}]$ における**任意の $\boldsymbol{g}$ に対する線形作用素**を $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})$ と表して $\boldsymbol{w}$ における $\boldsymbol{F}$ の**勾配（gradient）**と呼ぶ．Gateaux 微分可能であれば，方向微分と同じく

$$\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{g}] = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}+h\boldsymbol{g})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} \tag{2.128}$$

が成立する．具体的な計算はこの式を用いればよい．

Gateaux 微分は方向微分の一般化であり，$\boldsymbol{w}$ が空間位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ であるときの Gateaux 微分が方向微分である．Gateaux 微分の立場から方向微分 (8.119)〜(8.121) 式を見直すと，$f(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の方向微分は任意の $\boldsymbol{a}$ について存在し，かつ $\boldsymbol{a}$ に関して線形である．したがって，それら関数は微分可能である．そして，

$$\mathrm{D}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{a}] = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{a}\,, \quad \mathrm{D}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{a}] = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}\,, \quad \mathrm{D}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{a}] = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a} \tag{2.129}$$

だから，それぞれにおいて任意 $\boldsymbol{a}$ に対する線形作用素 $\mathrm{D}f(\boldsymbol{x})$，$\mathrm{D}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$，$\mathrm{D}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ は

$$\mathrm{D}f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\,, \quad \mathrm{D}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\,, \quad \mathrm{D}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k) \tag{2.130}$$

であり，これらは確かに先に (1.78)，(8.90)，(8.94) 式で与えられている勾配である．

Gateaux 微分については一般の関数の微分演算と同様な公式が成り立つ．

1. 和の Gateaux 微分は Gateaux 微分の和になる．

   $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w})$ のとき，

$$\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] = \mathrm{D}\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] + \mathrm{D}\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] \tag{2.131}$$

   [証明]

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] &= \left.\frac{\mathrm{d}\left(\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w}+h\boldsymbol{a})+\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w}+h\boldsymbol{a})\right)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0}\\ &= \frac{\partial \boldsymbol{F}_1}{\partial \boldsymbol{w}}\boldsymbol{a} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_2}{\partial \boldsymbol{w}}\boldsymbol{a}\\ &= \mathrm{D}\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] + \mathrm{D}\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}]\end{aligned}$$

2. あらゆるタイプのかけ算[12]($*$) の Gateaux 微分について積の微分法が成り立つ．
   $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w}) * \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w})$ のとき，

$$\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] = \mathrm{D}\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] * \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w}) * \mathrm{D}\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] \tag{2.132}$$

   [証明]

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] &= \left.\frac{\mathrm{d}\left(\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w}+h\boldsymbol{a}) * \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w}+h\boldsymbol{a})\right)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{F}_1}{\partial \boldsymbol{w}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w})\frac{\partial \boldsymbol{F}_2}{\partial \boldsymbol{w}}\boldsymbol{a} \\ &= \mathrm{D}\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] * \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w}) * \mathrm{D}\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}]\end{aligned}$$

3. 合成関数の Gateaux 微分については合成関数の微分法が成り立つ．
   $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{F}_1\left(\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w})\right)$ のとき，

$$\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] = \mathrm{D}\boldsymbol{F}_1\left(\boldsymbol{F}_2\right)\left[\mathrm{D}\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}]\right] \tag{2.133}$$

   [証明]

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}] &= \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1\left(\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w}+h\boldsymbol{a})\right)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{F}_1}{\partial \boldsymbol{F}_2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_2}{\partial \boldsymbol{w}}\boldsymbol{a}\right) \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{F}_1}{\partial \boldsymbol{F}_2}\left(\mathrm{D}\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}]\right) \\ &= \mathrm{D}\boldsymbol{F}_1\left(\boldsymbol{F}_2\right)\left[\mathrm{D}\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{a}]\right]\end{aligned}$$

2.4.3 汎関数の変分

ある集合 W に属する関数 $\forall\boldsymbol{w} \in W$ について汎関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})$ が定義されているとき，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})$ は集合 W 上の汎関数といわれる．

変分法は，$\boldsymbol{w}$ の微小な変化 $\delta\boldsymbol{w}$ に対する W 上の汎関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})$ の変化を調べる演算法を言う．そのときに与える変関数 $\boldsymbol{w}$ の微小な変化 $\delta\boldsymbol{w}$ のことを $\boldsymbol{w}$ の変分（variation）と呼ぶ．当然であるが，変化させた $\boldsymbol{w}+\delta\boldsymbol{w}$ がまた元の集合 W に属するようでなければ汎関数が定義できなくなるので意味がないことに注意する．

[12]スカラーの積，ベクトルやテンソルの内積，テンソル積，二階テンソルによるベクトルの線形変換など全てを指す．

さて，8.4 に説明しているとおり，$\boldsymbol{w}$ から変分 $\delta\boldsymbol{w}$ だけ変化させるときの汎関数 $\boldsymbol{F}$ の変化は，$\boldsymbol{F}$ の点 $\boldsymbol{w}$ における $\delta\boldsymbol{w}$ 方向の Gateaux 微分

$$\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})[\delta\boldsymbol{w}] = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}+h\delta\boldsymbol{w})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = \frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{w}}\delta\boldsymbol{w} \tag{2.134}$$

によって与えられる．

しかし，変分法では，この Gateaux 微分を**変分 $\delta\boldsymbol{w}$ に対する $\boldsymbol{F}$ の第一変分**あるいは単に **$\boldsymbol{F}$ の変分（variation）**と呼び，次のように $\delta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})$ で表す．汎関数 $\boldsymbol{F}$ の変分とは次式で定義される Gateaux 微分に他ならない．

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}) &\equiv \mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})[\delta\boldsymbol{w}] \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}+h\delta\boldsymbol{w})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = \frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{w}}\delta\boldsymbol{w}\end{aligned} \tag{2.135}$$

また，この定義に従って，変分 $\delta\boldsymbol{w}$ に対する $\boldsymbol{F}$ の第一変分を調べることを，**$\boldsymbol{w}$ に関して $\boldsymbol{F}$ の変分を取る**とも言う．