

マルチスケルトポロジー最適化手法の3次元構造問題への拡張

Three dimensional multi-scale topology optimization of composites

加藤 準治*・谷地 大舜**・高瀬 慎介***・寺田 賢二郎****・京谷 孝史†

Junji KATO, Daishun YACHI, Shinsuke TAKASE, Kenjiro TERADA and Takashi KYOYA

*Dr.-Ing. 東北大学助教 災害科学国際研究所 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

**学士 東北大学 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

***博士 (工学) 東北大学研究員 災害科学国際研究所 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

****Ph.D. 東北大学教授 災害科学国際研究所 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

†工博 東北大学教授 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

The present study applies so-called multi-scale topology optimization for minimization of compliance of three dimensional structural problems. Multi-scale topology optimization is a strategy to optimize topology of microstructures applying a decoupling multi-scale analysis based on a homogenization method. The stiffness of the macrostructure is maximized with a prescribed material volume of constituents under linear elastic regime. A gradient-based optimization strategy is applied and a semi-analytical sensitivity approach is introduced. It was verified from a series of numerical examples that the proposed method has great possibility for microscopic advanced material designs.

Key Words : *topology optimization, decoupling multi-scale analysis, microstructures, homogenization*

1. はじめに

本研究は、複合材料で構成された構造の力学的パフォーマンスを最大にすることを目的として、その材料設計に構造最適化手法を導入するものである。

複合材料の力学的挙動は、材料のミクロ領域における幾何学的特性、例えば材料配置や形状、寸法に強く依存し、材料の破壊に至るような非線形領域においてはこの依存性は顕著になることが知られている。例えば、金属材料においては材料強度の改善や靱性の向上を図る場合、それを可能にするミクロ結晶構造の探究が行われ、また、複合ゴムに至ってはエネルギー吸収性能や耐摩耗性を改善するミクロ組成の研究開発が行われている。これらのプロセスに共通することは、ミクロ構造の最適な構成材料と材料配置を決定する、つまり、最適なミクロ構造を見つけることによって、その力学的パフォーマンスを目的どおりに制御する、あるいは最大限に引き出すことを意図していることである。

近年、材料のミクロな特性を制御できる生産技術が現実のものとなりつつあるという背景を踏まえ、本研究ではミクロ構造の材料配置（ここではトポロジー）を最適化することでマクロ構造のパフォーマンスを最大にする手法の開発を行う。

トポロジー最適化は、これまで主にマクロ構造のトポロジーを対象として研究開発が行われてきた。一方、ミクロ構造のトポロジー最適化に関する研究については未だにその研究報告は少ない。以下にその代表的な研究報告を述べると、例えば、Sigmund¹⁾は逆均質化法と称する方法を用いて、所与のマクロ材料剛性 C^H と

等価な剛性を発現するミクロ構造のトポロジー決定手法を提案している。また、Sigmund と Torquato²⁾はその応用として、所与の熱膨張係数と等価になるミクロ構造トポロジーの決定手法を提案し、Larsen ら³⁾は負のポアソン比を発現できるミクロ構造トポロジーを紹介している。しかし、これらはミクロ構造だけの、つまり、ミクロの境界値問題のみで構成される支配方程式を解き、マクロ構造の挙動については考慮していない点に問題がある。一方、Rodrigues ら⁴⁾は、マクロ構造とミクロ構造の両方の挙動を加味し、両者のトポロジーを同時に最適化できる階層的な手法を提案している。しかし、この手法は1つのマクロ構造に異なるミクロ構造トポロジーが多数存在できるという状態を許容しており、均質化法で仮定する周期性を逸脱するとともに実際の製作性という観点から見ても非現実的な問題設定と考えられる。均質化法の周期性の仮定に逸脱しない問題設定としては、Niu ら⁵⁾の研究報告がある。その研究報告では低次固有振動数の最大化を目的としてミクロとマクロ構造両方のトポロジーを同時に最適化する手法を提案しており、そこでは「ミクロ構造はマクロ構造全体においてひとつだけ存在する」とした問題設定を行っている。

本研究では、製作可能な範囲を考慮して、「マクロ構造の幾何（トポロジーと形状）は初期の状態から不変とし、あくまでマクロ構造のパフォーマンスを最大にする唯一のミクロ構造トポロジー（マクロ構造全体で1種類のみ存在）を決定する」という問題設定を行っている。言い換えれば、マクロ構造の構造幾何を不変とし、材料のミクロ構造トポロジーだけを最適化する問

題で、そのマイクロ構造トポロジーはマクロ構造のどの物質点を取り出しても同じものが周期的に配置されているという設定である。Niu ら⁵⁾の問題設定と違ってマクロ構造のトポロジーを変化させない(最適化しない)理由は、例えば複合ゴムで構成されたタイヤの設計のように、そのマクロ構造のトポロジーは様々な条件から固定されてしまい、マイクロ領域における材料設計のみで構造特性をコントロールしなければならないような現実的な設計環境を想定したためである。

ところで、上記のようなマイクロ-マクロ連成問題を解くためには、均質化法を基本としたマルチスケール解析手法の導入が必要となる。均質化法によるマルチスケール解析法については、これまで多くの研究成果が報告され、現在では材料・幾何学的非線形特性を考慮に入れた様々な解析手法が提案されている⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾。これらは、マイクロおよびマクロ双方の境界値問題の精度を高めるためにマイクロ-マクロの2変数境界値問題を相互にやり取りしながら同時に解くもので、理論的にも確立された信頼できる手法である。しかし、これらの解析手法は理論的に難解であることに加え、計算量が膨大となることから実設計に応用されることは少ない。このことは、Niu ら⁵⁾の最適化手法をはじめ、マイクロ-マクロ連成型のマルチスケール解析法を基本とする最適化手法は、線形弾性問題であれば適用可能であるものの、非線形構造問題へ拡張することは理論を更に複雑化するとともに計算量が著しく増加するため、これ以上の発展は見込めないことを意味している。

このような背景から、加藤ら¹¹⁾および Kato ら¹²⁾は、「分離型マルチスケール解析法¹³⁾」と呼ばれる新しい手法を用いたマイクロ構造トポロジー最適化法(マルチスケールトポロジー最適化手法)を提案している。

分離型マルチスケール解析法は、寺田ら¹³⁾および Terada¹⁴⁾らによって紹介されたもので、マイクロ-マクロ2変数境界値問題を分離して解く手法である。この手法は、主に材料非線形性や幾何学的非線形性を有する2変数境界値問題等、複雑で数値計算量も多い問題に対し、「数値材料実験」と称する近似的アプローチを導入することでその数値計算量を極力小さくすることを意図したものがある。また、この手法はマイクロおよびマクロ境界値問題を個別に解くことから、理論的にも明快な近似的手法であり、様々な材料モデルにも同じ枠組みで適用出来る点において汎用性に優れる。

本研究では、文献^{11),12)}が2次元構造問題のトポロジー最適化に成功していることから、それを3次元構造問題に拡張するとともに、本手法の妥当性を検証することを目的とする。なお、本研究は分離型マルチスケール解析手法をトポロジー最適化に導入するための基礎的段階であるため、文献^{11),12)}と同様に線形弾性体を用いた構造問題を仮定し、マクロ構造の剛性を最大(コンプライアンスを最小)にする最適化問題を扱う。

本論文では、最初に分離型マルチスケール解析法の概要を述べ、次に本研究で使用した材料モデルと最適化問題の定式化について記述する。最適化アルゴリズムについては、数値解析上有効である勾配法を基本として、最適性規準法¹⁵⁾(optimality criteria method: 以下、OC法と略す)を用いた。ここでは、その感度の導出法として、随伴法を基本とした準解析法(semi-analytical method)を採用した。最後に、いくつかの数値解析例を用いて本手法の3次元構造問題への適用性を検証する。

2. 均質化に基づく分離型マルチスケール解析手法

2.1 概要

分離型マルチスケール解析手法¹³⁾は、マイクロ-マクロ2変数境界値問題を同時にカップリングしながら解く一般的な手法と異なり、マイクロ-マクロ2変数境界値問題を個々の境界値問題に分離して解く手法である。まず、マイクロ境界値問題については、均質化法を基本として周期的なマイクロ構造(ユニットセル)を取り出し、それを数値的な供試体とみなして材料実験を模擬する。そして、ここで得られたマイクロ解析結果をマクロな材料変数に変換することで、マクロ材料応答を計測したものと考える。このようにユニットセルに対する数値解析を通してマクロ材料挙動を得る一連の操作は「数値材料試験」と称されている。本研究では線形弾性体を想定しているため、マイクロ解析で得られるマイクロ応力 σ からマクロ応力 Σ を計算し、それをマクロ材料剛性 C^H に変換する。そして、得られたマクロ材料剛性を直接用いてマクロ境界値問題を解くこととなる。

なお、従来の線形のマルチスケール解析では、ユニットセルに与える所与のマクロひずみ E とユニットセル内の擾乱変位に線形の関係があると仮定し、それを特性変位(一般に χ と置かれる)と呼ばれる変数を導入することでマクロ材料剛性 C^H を求めるが、本手法では特性変位は存在せず、またその所与のひずみと擾乱変位との間に課された余計な仮定も不要で、あくまでユニットセルに課す数値材料試験結果からマクロ剛性を求める点が理論的に異なる。以下では、線形の分離型マルチスケール解析法について概説し、詳細については文献¹³⁾を参考にされたい。

2.2 ミクロ境界値問題

力学的平衡状態にある周期的なマイクロ構造を有する非均質弾性体に対して、力学的に等価な均質体を定義したものをマクロ構造と呼ぶ。ここでいう力学的に等価とは、マクロ構造内の任意の点 x におけるマクロ応力 Σ が非均質性を特徴づける周期的なマイクロ構造(ユニットセル)に依存し、それによって定義される、すなわち、次式のようにユニットセル内に分布するミク

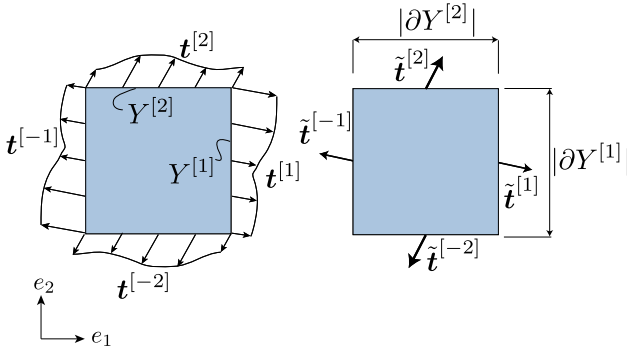


図-1 ユニットセルおよびマイクロとマクロの表面力ベクトル

ロ応力 σ の体積平均で求められることを意味する.

$$\Sigma = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma dy = \langle \sigma \rangle \quad (1)$$

ここで、 Y は周期的なマイクロ構造領域を意味し、 y はマイクロ構造内の任意の点を示す位置ベクトルでミクロスケール変数と呼ばれる.

同様にマクロひずみ E とマイクロひずみ ε も次のような関係にある.

$$E = \frac{1}{|Y|} \int_Y \varepsilon dy = \langle \varepsilon \rangle \quad (2)$$

ここで、マイクロひずみ ε は、ユニットセル内のマイクロ変位場 $w(x, y)$ より、次式のように定義され、

$$\varepsilon = \nabla_y^{\text{sym}} w \quad (3)$$

また、マイクロ変位場 w は次式のようにマクロひずみに比例して線形分布する項 $E \cdot y$ (線形変位場) と非均質性に起因して生ずる線形分布からのずれを表す項 u^* に分解できるものとする.

$$w = E \cdot y + u^* \quad (4)$$

ただし、この擾乱変位 u^* には、次式のようにユニットセル境界上 ∂Y で周期的であるという拘束条件を課す.

$$u^*|_{\partial Y^{[k]}} = u^*|_{\partial Y^{[-k]}}, \quad \text{for } k = 1, 2, 3 \quad \text{on } \partial Y \quad (5)$$

ここで、図-1、図-2 に示すようにユニットセルが直方体でその境界面が座標軸と平行におかれているとすれば $\partial Y^{[k]}$ は $Y^{[k]}$ 線 (すなわち正規直交基底ベクトル e_k が法線ベクトルとなる境界線) に平行で部分的な境界領域である. この擾乱変位の周期性より、実変位についても次式のような拘束条件が得られ、言い換えれば、次式は対なる周期境界間の相対変位に関する拘束条件式である.

$$w^{[k]} - w^{[-k]} = L^{[k]} E \quad (6)$$

ここで、簡単のため $w^{[k]} := w|_{\partial Y^{[k]}}$ とおいた. また、 $L^{[k]}$ は、矩形ユニットセルの e_k 軸方向において対となる境界面上の物質点を結合するための境界辺ベクトルと言

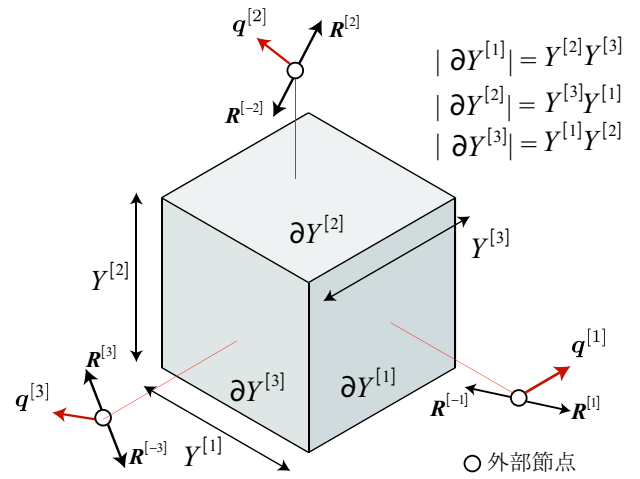


図-2 相対変位ベクトルを自由度に持たせた外部節点と節点反力 R の概念図

われるもので、以下のように定義される.

$$L^{[k]} := Y|_{\partial Y^{[k]}} - Y|_{\partial Y^{[-k]}} \quad (7)$$

また、ユニットセルのもう一つの周期境界条件として、単位ベクトル n を有する境界面上のマイクロ表面応力ベクトル $t^{[n]} = \sigma \cdot n$ はユニットセルの対となる境界面において反対称性が課せられる.

$$t^{[k]} + t^{[-k]} = 0 \quad (8)$$

ここで、簡単のため $t^{[\pm k]} := t^{[\pm e_k]}$ とおいた. この周期境界上のマイクロ表面応力ベクトル t をユニットセル境界で積分し、平均化すると次式のようなマクロの表面応力ベクトル $\tilde{t}$ とすることができる (図-1 参照).

$$\begin{aligned} \tilde{t}^{[k]} &= \Sigma \cdot e_k \\ &= \frac{1}{|\partial Y^{[k]}|} \int_{\partial Y^{[k]}} \sigma \cdot e_k dy = \frac{1}{|\partial Y^{[k]}|} \int_{\partial Y^{[k]}} t^{[k]} dy \end{aligned} \quad (9)$$

以上に述べた式にミクロスケールの平衡方程式とミクロ材料の構成則を加えた式により、ユニットセルに対するマイクロ境界値問題が定義できる. これらを再び整理して書き下すと以下のようになる.

(マイクロ境界値問題)

$$\left. \begin{aligned} \nabla_y \cdot \sigma &= 0 \\ \sigma &= \mathbb{C} : \varepsilon \\ \varepsilon &= \nabla_y^{\text{sym}} w \\ \Sigma &= \langle \sigma \rangle \end{aligned} \right\} \quad \text{in } Y \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}^{[k]} &= \frac{1}{|\partial Y^{[k]}|} \int_{\partial Y^{[k]}} \mathbf{t}^{[k]} dy \\ \mathbf{w}^{[k]} - \mathbf{w}^{[-k]} &= \mathbf{L}^{[k]} \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \text{ on } \partial Y^{[k]} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbb{C}$ はマイクロ構造内の線形弾性域における材料剛性である。

2.3 外部節点を用いたマイクロ問題の境界条件

ここでは、寺田ら¹³⁾に従い、前述のマイクロ境界値問題の境界条件に対し、外部節点という概念を取り入れて定式化したものを紹介する。まず、ユニットセルの周期境界における相対変位に関する拘束条件を以下のように書き表す。

$$\mathbf{w}^{[k]} - \mathbf{w}^{[-k]} = \mathbf{q}^{[k]} \quad (12)$$

with

$$\mathbf{q}^{[k]} = \mathbf{L}^{[k]} \mathbf{E} \quad (13)$$

$\mathbf{q}^{[k]}$ は、対となる周期境界面における相対変位ベクトルを意味する。また、3次元問題を対象としているため、ここでは所与のマクロひずみを $\mathbf{E} = \{E_{11} \ E_{22} \ E_{33} \ 2E_{12} \ 2E_{23} \ 2E_{13}\}^T$ と置けば、 $\mathbf{L}^{[k]}$ ($k = 1, 2, 3$) は以下のように書くことができる。

$$\mathbf{L}^{[1]} = \begin{bmatrix} l^{[1]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l^{[1]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l^{[1]} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{L}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & l^{[2]} & 0 & 0 \\ 0 & l^{[2]} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l^{[2]} & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{L}^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l^{[3]} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l^{[3]} & 0 \\ 0 & 0 & l^{[3]} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$l^{[1]} \sim l^{[3]}$ はそれぞれ $e_1 \sim e_3$ 軸に平行な矩形ユニットセル境界辺の長さを指す。

寺田ら¹³⁾は、図-2に示すようにユニットセル周期境界面 $\partial Y^{[k]}$ ごとに任意の物質点をユニットセル領域外の各境界面法線方向に一つずつ設け、その各物質点にそれぞれ $e_1 \sim e_3$ 軸に平行に3自由度を与える、外部節点なるものを定義し、更にその外部節点の節点自由度に、相対変位ベクトル $\mathbf{q}^{[k]}$ の成分を割り当てた。つまり、式(12)は対なる周期境界面上の2点の実変位ベクトルから計算される相対変位量を制御する拘束条件式である。

したがって、数値材料試験においてユニットセルにマクロひずみ $\mathbf{E}$ の任意の成分を与えるためには、式(13)からわかるように結果としてこの外部節点の相対変位成分 $q_i^{[k]}$ を制御すればよいことになる。

いま、式(12)の変位成分 $q_i^{[k]}$ を既知として与えた場合、それは相対変位 $w_i^{[k]} - w_i^{[-k]}$ を与えたことに他ならず、境界 $\partial Y^{[k]}$ 上のマイクロ表面応力ベクトル $\mathbf{t}_i^{[k]}$ はその境界全域で未知数となる。また、それによる境界 $\partial Y^{[k]}$

上での平均値であるマクロ表面応力ベクトル $\bar{\mathbf{t}}_i^{[k]}$ も未知数となる。

しかしながら、既知の相対変位成分 $q_i^{[k]}$ に対応する外部節点の反力を $\mathbf{R}_i^{[k]}$ と表せば、それはマイクロ応力ベクトル $\mathbf{t}_i^{[k]}$ をその境界で面積分したもの、すなわち

$$\mathbf{R}_i^{[k]} = \int_{\partial Y^{[k]}} \mathbf{t}_i^{[k]} dy \quad (17)$$

に他ならない。したがって、式(9)の関係より、外部節点の反力式(17)をユニットセル境界面積 $|\partial Y^{[k]}|$ で除したものが未知のマクロ応力成分 Σ_{ik} となることが分かる。つまり、

$$\Sigma_{ik} = \bar{t}_i^{[k]} = \frac{\mathbf{R}_i^{[k]}}{|\partial Y^{[k]}|} \quad (18)$$

であり、これをベクトル表記で書くと以下のとおりとなる。

$$\begin{Bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{t}_1^{[1]} \\ \bar{t}_2^{[2]} \\ \bar{t}_3^{[3]} \\ \bar{t}_2^{[1]} = \bar{t}_1^{[2]} \\ \bar{t}_3^{[2]} = \bar{t}_2^{[3]} \\ \bar{t}_1^{[3]} = \bar{t}_3^{[1]} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ここで、ユニットセルに6方向のマクロひずみ $\mathbf{E}^{(1)} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$, $\mathbf{E}^{(2)} = \{0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \dots, \mathbf{E}^{(6)} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}^T$ を個別に与えて、それぞれに数値材料試験を実施すれば、マクロ材料剛性 $\mathbb{C}^H$ を以下のように求めることができる。

$$\mathbb{C}^H = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11}^H & \mathbb{C}_{12}^H & \mathbb{C}_{13}^H & \mathbb{C}_{14}^H & \mathbb{C}_{15}^H & \mathbb{C}_{16}^H \\ \mathbb{C}_{12}^H & \mathbb{C}_{22}^H & \mathbb{C}_{23}^H & \mathbb{C}_{24}^H & \mathbb{C}_{25}^H & \mathbb{C}_{26}^H \\ \mathbb{C}_{13}^H & \mathbb{C}_{23}^H & \mathbb{C}_{33}^H & \mathbb{C}_{34}^H & \mathbb{C}_{35}^H & \mathbb{C}_{36}^H \\ \mathbb{C}_{14}^H & \mathbb{C}_{24}^H & \mathbb{C}_{34}^H & \mathbb{C}_{44}^H & \mathbb{C}_{45}^H & \mathbb{C}_{46}^H \\ \mathbb{C}_{15}^H & \mathbb{C}_{25}^H & \mathbb{C}_{35}^H & \mathbb{C}_{45}^H & \mathbb{C}_{55}^H & \mathbb{C}_{56}^H \\ \mathbb{C}_{16}^H & \mathbb{C}_{26}^H & \mathbb{C}_{36}^H & \mathbb{C}_{46}^H & \mathbb{C}_{56}^H & \mathbb{C}_{66}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{(1)} & \Sigma_{11}^{(2)} & \Sigma_{11}^{(3)} & \Sigma_{11}^{(4)} & \Sigma_{11}^{(5)} & \Sigma_{11}^{(6)} \\ \Sigma_{22}^{(1)} & \Sigma_{22}^{(2)} & \Sigma_{22}^{(3)} & \Sigma_{22}^{(4)} & \Sigma_{22}^{(5)} & \Sigma_{22}^{(6)} \\ \Sigma_{33}^{(1)} & \Sigma_{33}^{(2)} & \Sigma_{33}^{(3)} & \Sigma_{33}^{(4)} & \Sigma_{33}^{(5)} & \Sigma_{33}^{(6)} \\ \Sigma_{12}^{(1)} & \Sigma_{12}^{(2)} & \Sigma_{12}^{(3)} & \Sigma_{12}^{(4)} & \Sigma_{12}^{(5)} & \Sigma_{12}^{(6)} \\ \Sigma_{23}^{(1)} & \Sigma_{23}^{(2)} & \Sigma_{23}^{(3)} & \Sigma_{23}^{(4)} & \Sigma_{23}^{(5)} & \Sigma_{23}^{(6)} \\ \Sigma_{31}^{(1)} & \Sigma_{31}^{(2)} & \Sigma_{31}^{(3)} & \Sigma_{31}^{(4)} & \Sigma_{31}^{(5)} & \Sigma_{31}^{(6)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

したがって、この数値材料試験で得られたマクロ材料剛性 $\mathbb{C}^H$ を用いて、マクロ境界値問題を解くことが可能となる。これは、新たに導入した外部節点という架空の節点の自由度に、対なる周期境界面の相対変位量を与え、その外部節点の節点自由度を含めたマイクロ境界値問題を解くと、その節点自由度（相対変位）に対して反力に値するもの（応答値）が陰的にはマクロの表面力ベクトル $\tilde{\mathbf{t}}$ であり、それを直接を用いることでマクロ解析に必要なマクロの材料物性値を得ることができることを意味している。このような観点で言うと、

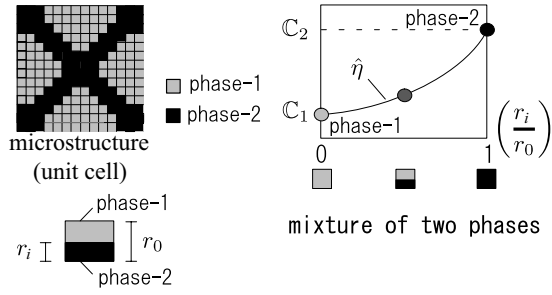


図-3 2層材料最適化の概念

(材料を選ばずとも) ミクロ境界値問題さえ解くことが出来れば、そこで得られた応答値からマクロの材料物性値を導出することは可能であり、つまりは非線形特性を有する材料であっても同様の枠組みでマクロの材料物性値を推定・同定することが可能であることを意味している。

3. 設計変数の定義およびミクロ材料モデル

3.1 設計変数の定義

本節は、最適化のための設計変数を定義した後、複合材料のミクロ材料モデルについて記述する。本研究で扱う材料は、図-3(左上)に示すとおり、ミクロ領域において異なる固体2種で構成された2層複合材料で、空隙を含まない理想的な線形弾性体とする。本研究では有限要素法を用いてミクロ境界値問題を解くことを前提とし、ここではユニットセル内の各有限要素における構成材料体積比を設計変数として定義した。

$$s_i = \frac{r_i}{r_0} \quad (21)$$

ここで、 s_i は設計変数を意味し、一般的なトポロジー最適化の場合と同様に $0 \leq s_i \leq 1$ の間で連続的に変化する関数として定義する。添え字 $i (= 1, \dots, n_{\text{ele}})$ は、 i 番目の有限要素を意味し、また、 n_{ele} はユニットセル内の要素の数である。2次元問題であれば、 r_0 と r_i はそれぞれ図-3(左下)に示す、ユニットセル内の任意要素の高さおよび phase-2 材料の高さというように図化できる。3次元問題の場合は、その図化は困難であるが等方性材料の材料体積比を表すものであることに変わりはない。これにより、各要素は $s_i = 0$ の場合、phase-1 がその要素を占め、逆に $s_i = 1$ のときは、phase-2 がそれを占有する。また、 $0 < s < 1$ の場合は2つの層の混合物であると考えられる。

3.2 ミクロ材料モデル

本研究で用いるミクロ材料モデルは、等方性の線形材料を仮定した多層材料モデル¹⁶⁾¹⁷⁾を用いた。多層材料モデルは、単一の多孔質材料に広く用いられる SIMP 法¹⁸⁾ (Solid Isotropic Microstructure with Penalization of

intermediate densities) の概念を複合材料に拡張したものである。

線形弾性モデルの場合、文献¹⁶⁾¹⁷⁾に準じて、以下のような等価弾性係数として定義する。

$$\mathbb{C} = (1 - s^\eta) \mathbb{C}_1 + s^\eta \mathbb{C}_2 \quad (22)$$

ここで、 $\mathbb{C}$ は線形弾性域における材料剛性であり、式(10)のそれと同一のものである。この式から明らかにように材料剛性係数 $\mathbb{C}$ は設計変数 s に陽的に依存するものであることがわかる。また、 $\mathbb{C}_1$ および $\mathbb{C}_2$ はそれぞれ phase-1 および phase-2 固有の材料弾性剛性で既知であり、最適化途中も変化しない。なお、 η は式(22)で示される内挿関数のべき乗数であり、その複合材料の物理的な意味を保証するものではない。

4. 最適化問題の設定

最適化問題の目的関数を $f(s)$ 、制約条件を与える等式制約関数を $h(s)$ と表す。 s は、設計変数 s_i を列に並べたもの、すなわち設計変数ベクトルを意味する。

目的関数はマクロ構造の剛性最大化であり、これをコンプライアンス最小化と等価であるとして以下のような定式化を行った。制約条件についてはユニットセル内にある phase-2 の体積はユニットセル全体で最適化計算中でも変化しないという等式制約条件を与えた。本最適化問題では、2種類の材料しか存在しないものと設定しているため、phase-1 の体積も同時にユニットセル全体で変化しないことを意味し、更には構造全体で一つのユニットセルを共有するため、マクロ構造全体でも個々の材料の体積は変化しないことは自明である。以下に加藤ら¹¹⁾に倣い、マトリックス形式で表記した最適化問題を記す。

$$\min f(s) = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \quad (23)$$

$$h(s) = \int_Y s_i dY - \hat{V} = 0 \quad (24)$$

$$s_L \leq s_i \leq s_U \quad i = 1, \dots, n_s \quad (25)$$

ここで、 $\mathbf{F}$ および $\mathbf{d}$ はそれぞれマクロ構造全体系の外力ベクトルと節点変位ベクトルである。また、 s_L および s_U は設計変数の下限と上限値、 n_s は設計変数の数でここではユニットセル内の有限要素の数 n_{ele} と一致する。 $\hat{V}$ についてはユニットセル内における所与の phase-2 材料の総体積である。

本研究では勾配法による最適化アルゴリズムを用いるため、2変数境界値問題を解いた後に目的関数と制約関数の設計変数 s_i に関する感度 $\partial f / \partial s_i$ 、 $\partial h / \partial s_i$ を求める必要がある。ここで得られた感度を最適化アルゴリズム (OC 法) へ組み込み、その時点での最適解を求め、その解が収束するまで繰り返し計算を行う。なお、

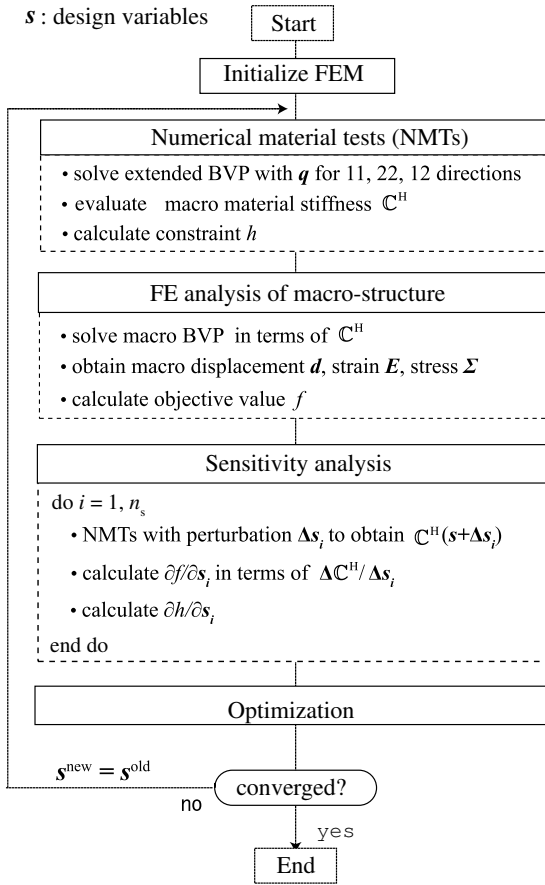


図-4 本最適化手法の手順

OC 法の詳細については文献¹⁵⁾を参照されたい。また、参考までに図-12 に本手法の解析手順を示しておく。

5. 感度の導出

目的関数の設計変数 s_i に対する感度については文献¹¹⁾に従い、以下の随伴法（正確には準解析的随伴法）による感度の導出式を用いた。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s_i} &= -d^T \frac{\partial K}{\partial s_i} d \\ &= - \int_{\Omega} E^T \frac{\Delta \mathbb{C}^H}{\Delta s_i} E d\Omega \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 $\Delta(\bullet)$ は差分を意味している。これは、マクロの材料剛性 $\mathbb{C}^H$ の設計変数 s_i に関する勾配を本来は $\partial \mathbb{C}^H / \partial s_i$ と表記し、解析的に解くべきであるがその感度の導出が困難であることから、 $\Delta \mathbb{C}^H / \Delta s_i$ というように差分近似によって導出することを意図したものである。

次に、等式制約条件式 (24) の感度についてであるが、これは以下の式で容易に求めることができる。

$$\frac{\partial h}{\partial s_i} = \int_Y dY \quad (27)$$

表-1 材料データ

	ヤング係数 (N/mm ²)	ポアソン比
phase-1	10	0.3
phase-2	10000	0.3

6. 最適化計算例による本手法の妥当性の検証

6.1 解析条件

本節では、3次元のマイクロ構造トポロジー最適化手法による最適化計算例を紹介し、その結果から本手法が「マクロ構造の力学的挙動」を正しく評価した最適なマイクロ構造トポロジーが得られるかを検証する。本計算例ではそのモデルの違いから計算例を2つに分けて紹介する。まず、マクロ構造を8節点六面体1要素で構成した場合の計算例について紹介する。ここでは、マクロ構造に複雑な構造モデルを採用すると得られた最適化結果の評価が困難となるため、敢えて8節点六面体1要素で構成された単純なマクロ構造モデルを採用し、その評価をしやすくした。次に、より現実的な例としてマクロ構造の要素数を増やした場合の最適化計算例を紹介する。ここでは、一端が完全固定された直方体構造に3種類の異なる荷重を作用させた場合に得られた結果について考察する。なお、前述のとおり、いずれの計算例でもマイクロ構造はマクロ構造に対して1種類しか存在しないものと仮定している。また、マイクロ構造における材料は2種類（2層複合材料）とし、空隙は存在しないものと仮定した。phase-2（黒）の材料剛性はphase-1（白）のそれよりも大きいものとして設定し、その材料定数を表1に記す。式(22)で示したべき乗数 η についてはどの場合においても $\eta = 5$ を採用した。最適化前の初期状態ではいずれの有限要素にもphase-1とphase-2がそれぞれ50%ずつ含まれるものとした。そのため、設計変数の初期値はすべての要素で $s_i = 0.5$ である。この構造に含まれる材料の総体積は最適化計算中も変化しないものとする。

また、本研究では、最適化した後のトポロジーがチェッカーボードと言われる物理的意味を持たない材料配置へ帰着することを避けるために加藤ら¹²⁾の研究報告と同様に次式で示されたメッシュ非依存型フィルタリング法¹⁹⁾²⁰⁾を採用した。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s_i} &= \frac{1}{s_i \sum_{j=1}^N \hat{H}_j} \sum_{j=1}^N \hat{H}_j s_j \frac{\partial f}{\partial s_j} \\ \text{with } \hat{H}_j &= r_{\min} - \text{dist}(i, j) \end{aligned} \quad (28)$$

ここに、 $\text{dist}(i, j)$ は i - j 間の有限要素中心距離を、 $r_{\min}$ はフィルター半径と言われ、フィルタリングを行う要素の範囲を決めるものである。フィルター半径 $r_{\min}$ が無限大のとき感度 $\partial \tilde{f} / \partial s_j$ はすべての要素で等しくな

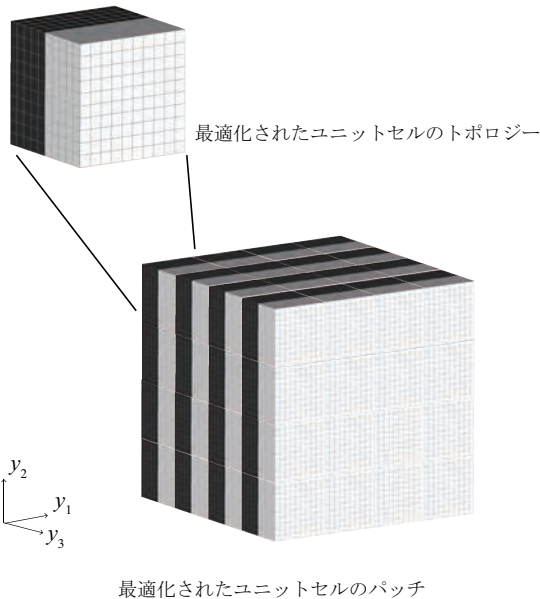
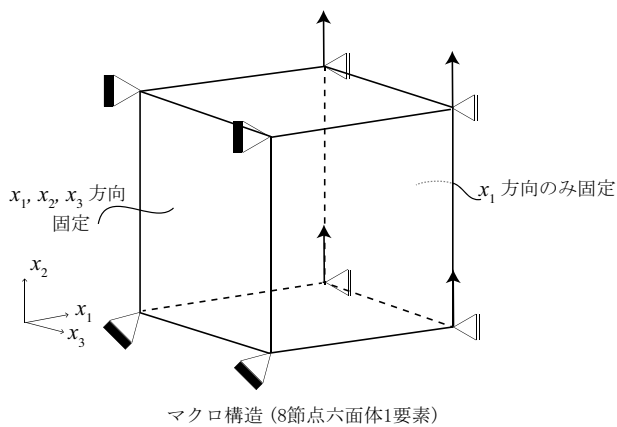


図-5 x_1x_2 方向に単純せん断変形を受けるマクロ構造モデル (上図) と最適化されたマイクロ構造トポロジー (ユニットセルとそのパッチ)

り、逆にゼロに近づくにつれ、実際の感度 $\partial f / \partial s_j$ に近づく。なお、得られるトポロジーはこのフィルタリングの数値に強く依存する。以下では、問題に応じてフィルター半径 $r_{\min}$ を適宜変化させながらマイクロ構造のトポロジーを最適化した。なお、この検証にあたってはいずれの最適化例も「一意に最適解が求まらない問題」であることに注意されたい。ここで、「一意に最適解が求まらない」とは、数学上同じ目的関数値を与える最適解が複数存在することを意味する。そのため、同じトポロジー最適化問題であっても、例えば異なる計算機を用いれば異なる最適化トポロジーが得られ、しかもそれらはともに最適解である¹²⁾。

6.2 1要素の単純なマクロ構造の場合

ここでは、1辺100mmの8節点六面体1要素でモデル化したマクロ構造に単純せん断変形を与えた場合の最適化計算例を示し、本手法の妥当性を検証する。

マクロ構造は、 x_1x_2 方向に単純せん断変形を与えた

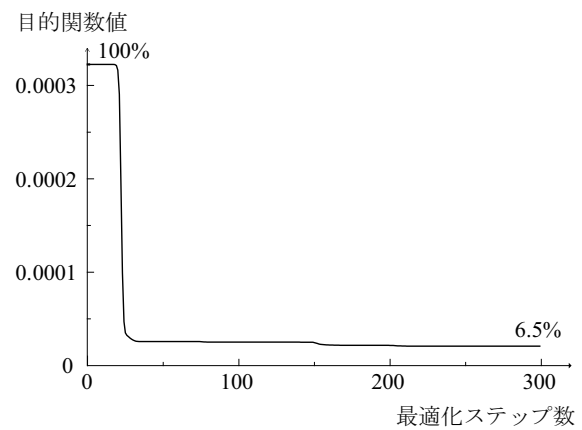


図-6 目的関数値の変化

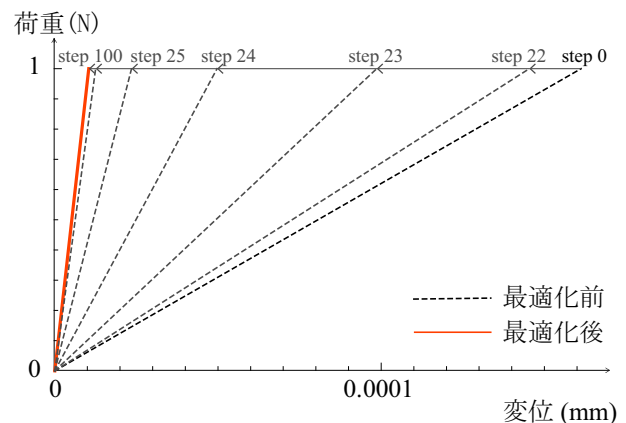
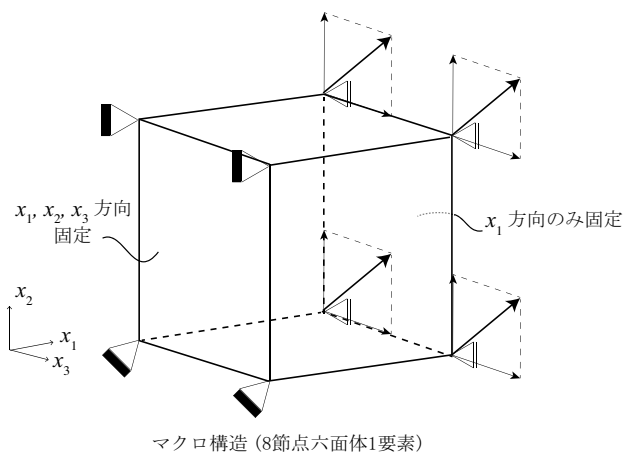


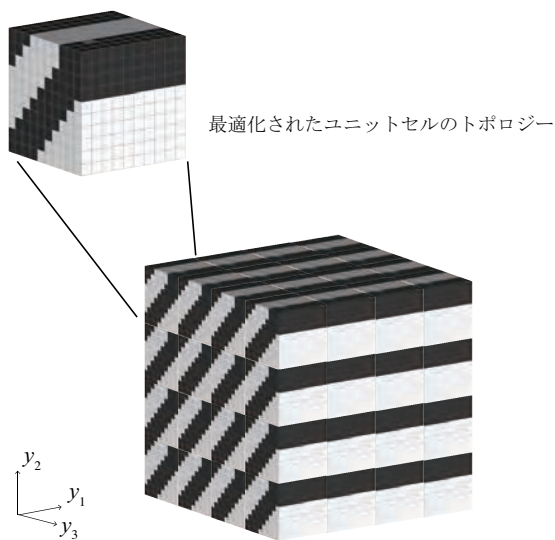
図-7 荷重-変位曲線の変化

場合 (図-5 上) と x_1x_2 方向と x_1x_3 方向の斜め方向に単純せん断変形を与えた場合 (図-8 上) の2つを用意した。ユニットセルの形状は立方体とし、一辺の長さは正規化して単位長さとした。使用した有限要素は8節点六面体要素で、要素数は1000 ($10 \times 10 \times 10$) とした。

図-5 上のモデルを用いて解析を行った結果、図-5 下のような2つの材料が y_3 方向に分離したマイクロ構造のトポロジーが得られた。また、この最適化計算による目的関数値の変化と荷重-変位曲線の変化をそれぞれ図-6、図-7 に示す。得られたトポロジーについて述べると、当初は加藤ら¹²⁾の研究報告文図-5にある2次元問題のように、phase-2の材料がせん断力に抵抗するように斜め 45° に配置され、それが y_3 方向に連なる3次元のトポロジーが得られるものと想定していたが、今回得られた結果はそれとは異なるものとなった。そこで、上述の想定していたトポロジーを用いて敢えて構造解析を実施し、それによって得られた目的関数値と最適化計算結果の目的関数値とを比較したところ、本最適化結果の方がその値は小さく、剛性が高くなることを確認した。得られたトポロジーは、せん断応力のみならず、 y_1 方向の拘束によって生じる y_1 方向 (水平) 軸



マクロ構造 (8節点六面体1要素)



最適化されたユニットセルのパッチ

図-8 x_1x_2 方向と x_1x_3 方向にせん断変形を受けるマクロ構造モデル (上図) と最適化されたマイクロ構造トポロジー (ユニットセルとそのパッチ)

力に対しても同時に抵抗するようなトポロジーであり、力学的に理にかなうマイクロ構造が得られたことを示すものである。今回得られた結果のように、phase-2 が一枚のプレートとなるようなトポロジーは、3次元問題とすることではじめて得られる最適化構造であるといえる。また、図-6、図-7 から、本最適化計算によって目的関数値 (コンプライアンス) が初期構造から約 94% 減少し、剛性が著しく増加していることが確認できた。

次に図-8 上のマクロ構造モデルを用いた場合に得られた最適化トポロジーを図-8 下に示す。得られた結果をみると、図-5 で得られたトポロジーを斜め 45° 方向に傾けたトポロジーとなっており、本モデルのせん断変形の方に合致する期待通りのものが得られたといえる。また、図-9 の目的関数値の変化および図-10 に示す荷重-変位曲線の変化から、目的関数値が著しく減少し、剛性が高まっている様子がわかる。

以上の計算例より、本手法は単純なマクロ構造の挙

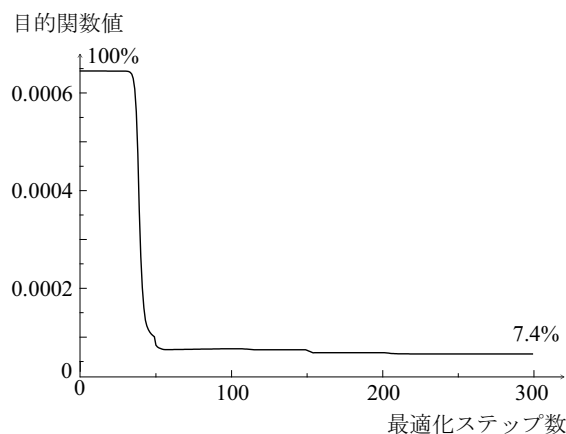


図-9 目的関数値の変化

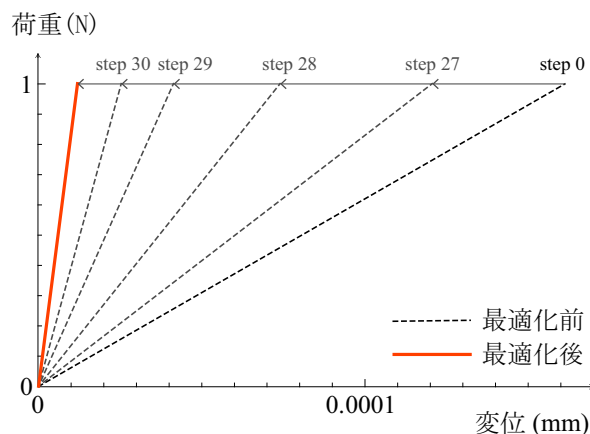


図-10 荷重-変位曲線の変化

動に対して力学上合理的なトポロジーを決定できるものであることが確認できた。

6.3 一端固定されたマクロ構造の場合

本計算例では、図-11 に示す一端固定されたマクロ構造に 3 種類の異なる等分布荷重を与えた場合に得られる最適化マイクロ構造を比較しながら、本手法の妥当性を検証する。マクロ構造の寸法は、構造長 200mm、構造高 100mm、構造幅 100mm とする。荷重の分布については、case1 では 400kN/m^2 の等分布荷重を上面に作用させ、case2 では 400kN/m^2 の等分布荷重を上面と側面に作用させている。case3 は、case2 の側面の等分布荷重の大きさを 4 分の 1 の 100kN/m^2 に縮小したものである。ユニットセルはどのマクロ構造モデルにおいても前節と同様の立方体モデルを用いた。

case1 の最適化されたマイクロ構造とマクロ構造の応力図をそれぞれ図-12 (上) と図-13 に示す。また、目的関数値の変化と荷重-変位曲線の変化をそれぞれ図-14、図-15 に示す。図-13 から、曲げ変形によって構造付け根の上下端部の Σ_{11} が卓越し、また、応力値は比較的小さいものの Σ_{12} が広い範囲で作用していることがわか

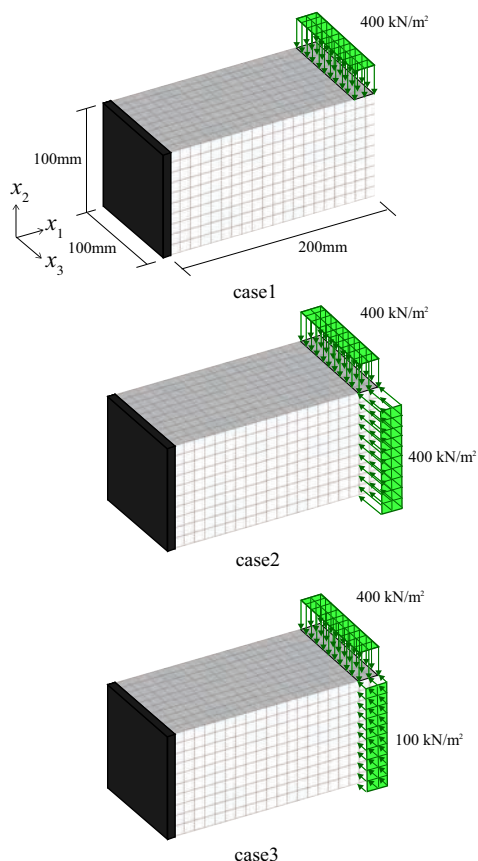


図-11 マクロ構造モデル

る。最適化されたマイクロ構造をみると、前節で単純せん断変形を与えたときとほぼ同様のトポロジーが得られたが、ここでは、曲げによる x_1 方向の軸力と x_1x_2 方向のせん断力の両方に抵抗できるトポロジーが得られた。また、目的関数値であるコンプライアンスが約 93% 減少し、剛性が著しく増加している様子が、図-14、図-15 から確認できる。しかし、この場合図-8 のような明確な板状のトポロジーとは若干異なるものが得られた。これは、このマクロ構造の変形が一樣変形に代表されるような単純な変形ではないこと、3次元構造としたことで2次元問題に比べ設計自由度が増し、得られる最適化トポロジーも多様になったこと、また、フィルター半径の設定の影響によるものである。フィルター半径の設定を緻密にうまく行えば、より整然としたトポロジーが得られるがそれはトライアルアンドエラーの作業となるためここでは、一般的なフィルター設定で計算した結果を示して。これについては、case2 と case3 についても同様である。

次に case2 の最適化されたマイクロ構造とマクロ構造の応力図をそれぞれ図-12 (中) と図-16 に示す。なお、最適化による目的関数値の変化と荷重-変位曲線の変化については、次の case3 も含めて case1 のそれと同様の変化が得られており、ここでは誌面のスペースの関係上、それらについては省略した。この場合、case1 と

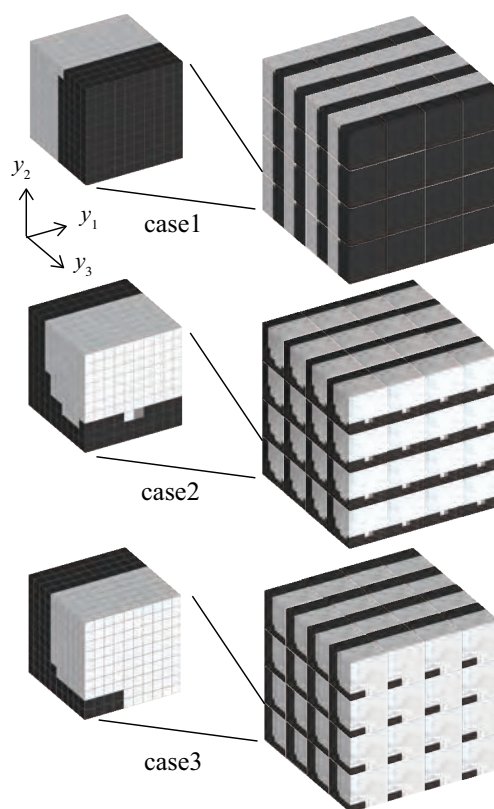


図-12 最適化されたユニットセルとそのパッチ（マイクロ構造）

同様に Σ_{11} が卓越したことで y_1 方向に連続するトポロジーが得られ、また、同じ大きさの荷重を受ける2軸作用によって y_2 方向と y_3 方向にほぼ同じ厚みを有する L 字型の phase-2 層が見られる。この結果は、マクロ構造の応力状態からみても合理的なマイクロ構造であるといえる。

最後に case3 の最適化されたマイクロ構造トポロジーおよびマクロ構造の応力図をそれぞれ図-12 (下)、図-17 に示す。この場合、 x_2 方向の鉛直荷重が x_3 方向の側方荷重よりも大きいことにより、 Σ_{11} 応力の分布が固定端において x_3 方向幅に広がっていることがわかる。その結果、case3 で得られた最適化されたトポロジーと case2 のそれを比べてみると、鉛直方向に板状に分布する phase-2 層の厚み (y_3 方向幅) が大きくなり、水平方向にあった板状の層の厚み (y_2 方向幅) が減少したほか、 y_1 方向に不連続な棒状の材料分布となった。したがって、この結果はマクロ構造の荷重の変化を適切に反映したマイクロ構造トポロジーであるといえる。これらの計算例より、本最適化手法はマクロ構造の力学的挙動を忠実に反映した上で、マイクロ構造トポロジーを最適化できるものであることが3次元構造モデルを用いて確認された。

最後に、本手法を3次元問題に拡張した場合に確認された問題点について明記する。まず、目的関数の感度式 (26) が部分的に差分法を用いており、これが原因

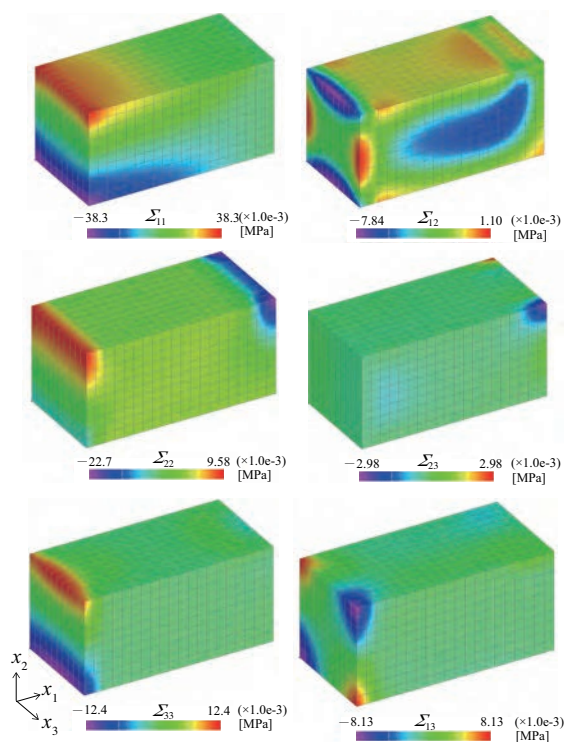


図-13 マクロ構造応力図 (case1)

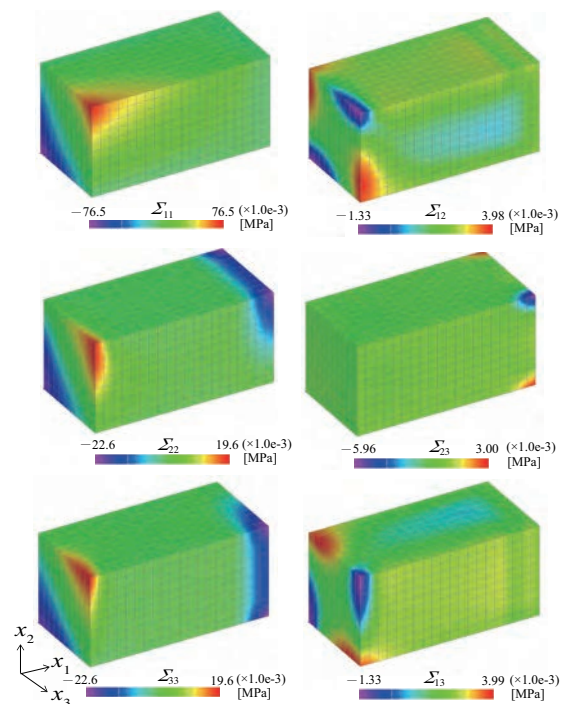


図-16 マクロ構造応力図 (case2)

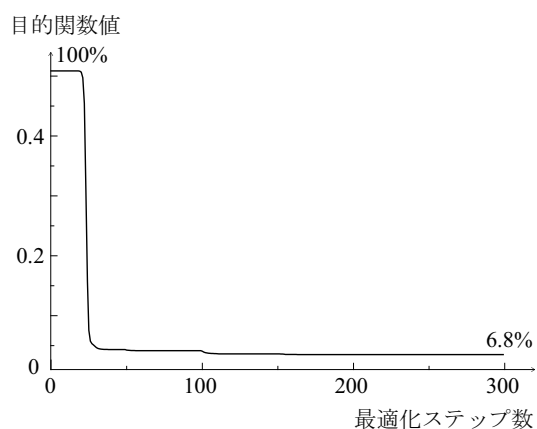


図-14 目的関数値の変化 (case1)

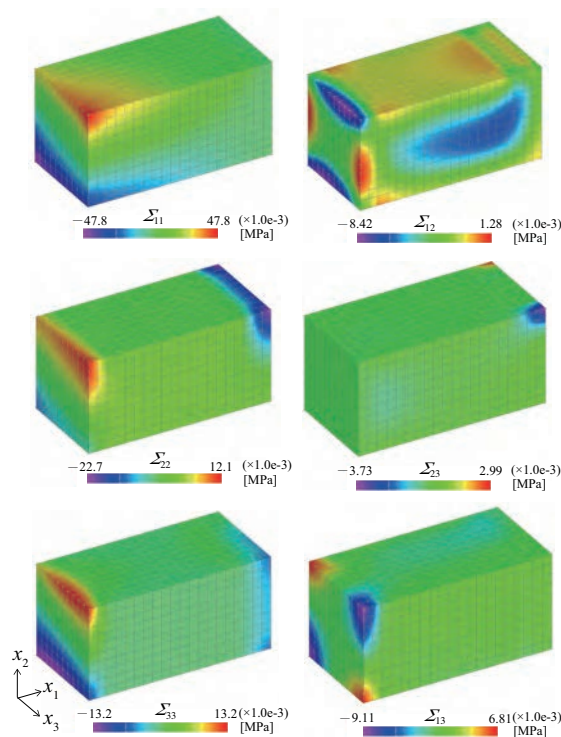


図-17 マクロ構造応力図 (case3)

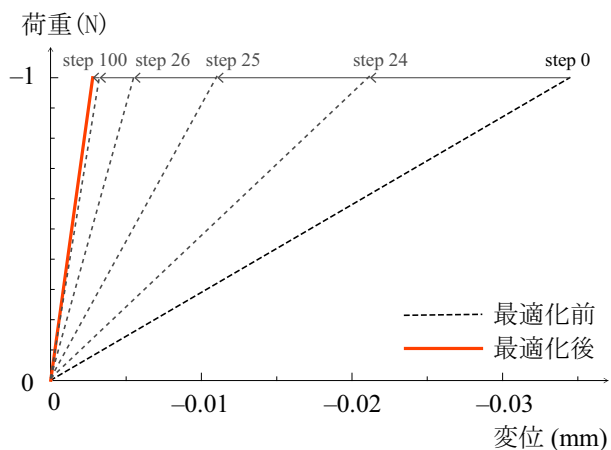


図-15 荷重-変位曲線 (case1)

で数値計算量を増大させるという問題点である。本手法では、マクロ材料剛性の設計変数に対する感度を差分法で導出しているが、3次元ユニットセルの離散化で要素数が増大すると、その感度を導出するために実施される数値材料実験の回数が要素数に比例して大き

くなるため、何度もマイクロ境界値問題を解かなければならない。本計算例で用いたユニットセルの要素数程度であればそれほど多くの計算を要しないが、細かい要素メッシュを用いる場合は並列計算機を適用するなどの対策が必要である。数値材料実験は、前述のとおり、 $E^{(1)} \sim E^{(6)}$ で示される独立した6方向のマクロひずみを個別に境界条件として与え、そのマイクロ境界値問題を解くものであるが各方向の計算は個別に行うことができるため、並列計算を実施しやすく、また並列化する計算機の数に比例した並列計算効果を得やすい構成であるといえる。しかし、本論文ではそもそも線形弾性体という簡易な材料モデルを使用しており、その問題に対して並列計算機を導入しなければならないのであればやはり汎用性に優れるとは言い難い。これを回避するためには、解析的に導出できる感度式を定式化する必要がある。

2つ目は、式(28)において、ユニットセル内における各々の有限要素間の中心間距離を保存する行列 $\text{dist}(i, j)$ の大きさに関するものである。この行列は、要素数 $\times$ 要素数のサイズを有するフルマトリックスであり、ユニットセルを構成する有限要素数が増大するにつれ、大きなメモリを消費することになる。使用する計算機環境によっては、これが原因で要素数に制限が加わるため、事前に注意しておく必要がある。ちなみに、本計算例で用いたユニットセルに対しては、約8GBのメモリを消費した。無論、この問題については本手法の問題ではなく、3次元トポロジー最適化問題全般における課題である。

7. 結論

本論文の目的は、複合材料のマクロ構造の剛性を最大にするためのマルチスケルトポロジー最適化法を3次元構造問題に適用し、いくつかの最適化計算例を用いて3次元構造問題への適用可能性を検証することである。ここでは、分離型マルチスケール解析手法をトポロジー最適化に導入するという新しい枠組みでマクロ構造の剛性最大化を意図した最適化手法を提案し、数値計算例を用いて本手法の3次元構造問題への適用性とその妥当性が検証された。

以下に本研究の主な成果を示す。

- 提案した手法は、マクロ構造の力学的挙動を忠実に反映し、そのマイクロ構造のトポロジーを最適化できる手法であることがいずれの最適化計算例でも検証された。
- 文献¹⁹⁾²⁰⁾に準じたフィルタリング法を用いて最適化計算を実施したが、整然としたトポロジーを得るにはフィルター半径を設定を緻密に実施する必要がある。
- 目的関数の感度の導出において一部差分法によっ

て勾配を求める項が存在するため、線形問題の割には感度解析に多くの時間を要した。ユニットセルに細かいメッシュを使用する場合は並列計算機の導入が望まれる。

参考文献

- 1) Sigmund, O.: Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem, *Int. J. Solid. Struct.*, 31, 13, pp. 2313–2329, 1994
- 2) Sigmund, O., Torquato, S.: Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method, *J. Mech. Phys. Solids*, 45, 6, pp. 1037–1067, 1997.
- 3) Larsen, U.D., Sigmund, O., Bouwstra, S.: Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio, *J. MEMS*, 6, 2, pp. 99–106, 1997.
- 4) Rodrigues, H., Guedes, J.M. Bendsoe, M.P.: Hierarchical optimization of material and structure, *Struct. Multidisc. Optim.*, 24, pp. 1–10, 2002.
- 5) Niu, B., Yan, J., Chen, G.: Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency, *Struct. Multidisc. Optim.*, 39, 2, pp. 115–132 2009.
- 6) Smit, R.J.M., Brekelmans, W.A.M., Meijer, H.E.H.: Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155, pp. 181–192, 1998.
- 7) Wieckowski, Z.: Dual finite element methods in homogenization for elastic-plastic fibrous composite material, *Int. J. Plast.*, 16, pp. 199–221, 2000.
- 8) Zheng, S.F., Ding, K., Denda, M., Weng, G.J.: A dual homogenization and finite-element study on the in-plane local and global behavior of a nonlinear coated fiber composite, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 183, pp. 141–155, 2000.
- 9) Feyel, F., Chaboche, J.-L. FE² multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 183, pp. 309–330, 2000.
- 10) Terada, K., Kikuchi, N.: A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190, pp. 5427–5464, 2001.
- 11) Kato, J., Terada, K., Kyoya, T.: Topology optimization of micro-structure for composites applying a decoupling multi-scale analysis, *Struct. Multidisc. Optim.*, submitted, 2013.
- 12) 加藤 準治, 寺田 賢二郎, 京谷 孝史: 複合材料のマクロ構造挙動を考慮したマイクロ構造トポロジー最適化, 土木学会論文集 A2(応用力学), 68, 2 (応用力学論文集 15), 1-279–1-287, 2012.
- 13) 寺田 賢二郎, 犬飼 壮典, 濱名 康彰, 見寄 明男, 平山 紀夫: 数値材料試験による異方性超弾性体のパラメータ同定, *Transactions of JSCEs*, 2008, 20080024, 2008
- 14) Terada, K., Kato, J., Hirayama, N., Inugai, T., Yamamoto, K.: A method of two-scale analysis with micro-macro decoupling scheme: application to hyperelastic composite materials, *Comput. Mech.*, DOI 10.1007/s00466-013-0872-5, 2013.
- 15) Patnaik, S.N., Gupitill, J.D., Berke, L.: Merits and limitations of optimality criteria method for structural optimization, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 38, pp. 3087–3120, 1995.
- 16) Kato, J., Lipka, A., Ramm, E.: Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening, *Struct. Multidisc. Optim.*, 39, pp. 63–81, 2009.
- 17) 加藤 準治, 寺田 賢二郎, 京谷 孝史: 繊維複合材料のひずみ軟化を考慮した多層材料最適化手法の提案, 土木学会

論文集 A2 (応用力学) , 67, 1, pp.39–53, 2011.

- 18) Zhou, M., Rozvany, G.I.N.: The COC algorithm, part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 89, pp. 309–336, 1991.
- 19) Bendsøe, M.P., Sigmund, O.: Topology optimization, theory, method and applications, *Springer-Verlag*, Berlin/Heidelberg/New York.
- 20) Sigmund, O., Pettersson, J. : Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, *Struct. Multidisc. Optim.*, 16, 1, pp. 68–75, 1998.

(2013 年 3 月 18 日 受付)