## 逆均質化法を用いた マイクロクラック分布の同定

加藤 準治1・河西 亮輔2・京谷 孝史3・寺田 賢二郎4

 <sup>1</sup>正会員 東北大学准教授 大学院工学研究科(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06) E-mail: junji.kato.a5@tohoku.ac.jp
 <sup>2</sup>学生会員 東北大学 大学院工学研究科(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06)
 <sup>3</sup>正会員 東北大学教授 大学院工学研究科(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06)
 <sup>4</sup>正会員 東北大学教授 災害科学国際研究所(〒980-0845 仙台市青葉区荒巻字青葉468-1)

劣化の主な要因であるひび割れが発現する初期段階にはマイクロクラック(微細ひび割れ)という状態があ る.マイクロクラックは、将来的な構造物の劣化を引き起こす要因となるため、早期発見が重要であると認識 されている.しかし、未だに実用に耐える非破壊検査による検出方法はない.このような中、実際の計測とは 別に数値解析技術を活用した非破壊検査に関する研究開発が注目されている.本研究では、劣化した材料の異 方性材料剛性が観測できるという仮定のもと、マイクロクラックを有限要素法を基本とした代表体積要素(ユ ニットセル)でモデル化し、逆均質化法というトポロジー最適化の枠組みを活用することで、所与の観測され た異方性材料剛性と等価な剛性を持つマイクロクラックの分布を求める手法を提案する.

Key Words : micro-crack, topology optimization, inverse-homogenization, non-destructive inspection

## 1. はじめに

近年,土木構造物の材料劣化による事故が多く見ら れ,社会的な問題となっている.それらの事故の原因 のひとつにコンクリートのひび割れがあるが,ひび割 れが発生する主な要因は施工不良はもとより,気象寒 暖の変化や凍結・融解などの過酷な使用環境,乾燥・収 縮,地震や不同沈下による過度な作用外力などである. 実際にはこれらが相互に関係し合う複雑なマルチフィ ジックス現象の結果であるといえる.

ところで、コンクリートのひび割れについては、肉眼 で認識できる比較的大きなひび割れと、それが困難な マイクロクラックと呼ばれる微小ひび割れがある.前 者については構造物の力学的安定性などに直接的に影 響するもので、ひび割れの大きさや発生場所によって は構造物に甚大な被害を及ぼすものである.

一方,マイクロクラックは,マクロクラックほどの 影響力はないものの,構造物の劣化開始時期や劣化速 度に関わる重要な要素であると考えられている.細田 ら<sup>1)</sup>は,マイクロクラックの存在により,コンクリート 表面の吸水抵抗性が著しく低下し,後の構造物の耐久 性に影響を与えるとした実験報告を行っている.それに 加えて,マイクロクラックが確認された段階で対策工 としてシラン系表面含浸材を塗布すれば吸水抵抗値が 大幅に改善できるとした実験験結果を示している.こ のことは,構造物の耐久性向上に関わる有用な情報で

#### あると言えよう.

Jensen と Chatterji<sup>2)</sup>は、マイクロクラック幅が0.1 µm を越えると気体の移動がはじまり、10 µm を越えると 液体の移動も容易となること、さらにそれが進展する ことで鉄筋腐食が発生するとした実験結果を示してい る.なお、承知のとおり、鉄筋の腐食膨張が進むとマ クロクラックが発生しやすくなる。そのため、マイク ロクラックを早期に検出し、その密度やひび割れ分布 などの特性を把握することができれば、適切な対策工 を早い段階に実施でき、それによって構造物における 耐久性の向上が期待できる。

このような背景から,本研究はマイクロクラックの 早期検出ならびにその特性把握の一助になることを目 的とした基礎的研究を行うものである.

ところで、マイクロクラックの大きさについては様々 な見解があるが明確な定義はいまだにないようである. 例えば、Mehta と Monteiro<sup>3)</sup>は、その著書の中でマイク ロクラックの大きさにかなりの幅があることを示し、ま た、国際材料構造試験研究機関・専門家連合 RILEM (International union of laboratories and experts in construction materials, systems and structures) では、マイクロク ラックの最大幅を環境要因によって生じたマイクロク ラックと力学的な要因よって生じたものとに区別して 議論している<sup>4)</sup>. そこでは、力学的要因によって生じる マイクロクラックの最大幅として、0.1 mm (100  $\mu$ m) が 適当であると主張している. 一方、環境要因によって 生じるマイクロクラックの最大幅については6 μm が適 当であるとしているが,同組織の微細構造に関する研 究グループは通常最大幅として 10 μm を主張している.

文献<sup>4)</sup>では、このような様々な見解の不一致を考慮し て、マイクロクラックの幅をやや大きくとって 0.1 ~ 100µm として取り扱っている。本研究は、後述するよ うに数理的アプローチによってマイクロクラックの分 布を同定するための基礎的研究であるが、現段階では 理論的にその大きさまでを考慮できるものではないた め、便宜上、文献<sup>4)</sup>に従って 0.1 ~ 100µm 程度のものを マイクロクラックと指すこととする。

ところで、マイクロクラックの検出法については、コ ンクリート表面を染料で処理して直接観察する方法や 超音波などを用いて間接的に検出する方法、ステレオ 写真を用いる方法などがあるが、これらは検出領域が 限定的であり、実構造物への適用には不向きである。つ まり、マイクロクラックに関してはその重要性が指摘 されながらもいまだに実構造物に対して有効な検査方 法が確立されていないのが現状である。

このような中,実際のひび割れ計測とは別に,数値 シミュレーションを活用した非破壊検査(非破壊検査 シミュレーション)が注目されている.そのひとつとし て,岩舘ら<sup>11)</sup>は粒子フィルタという逆解析手法を用い てトンネル覆工の健全度評価を行っている.そこでは トンネルを有限要素法でモデル化し,トンネル内空変 位の観測データから,損傷・経年劣化による覆エコンク リートの損傷程度(ここではヤング率の低下量)およ び損傷位置,損傷範囲の同定を行っている.また,この 粒子フィルタを活用した非破壊検査シミュレーション では,劣化した材料の異方的な材料剛性を求めること も理論的に可能であることが分かってきた.

そこで、本研究は非破壊検査シミュレーションに関 する研究開発の立場から、異方的な弾性材料剛性テン ソル(あるいは行列)が所与であるとした上で、マイ クロクラック分布を同定する手法の開発に挑戦するも のである.具体的に言うと、本研究ではトポロジー最 適化に基づく逆均質化法という手法を応用する.

逆均質化法は、Sigmund<sup>12)</sup>によって提案されたもので、 マクロ的な材料パラメータを所与とし、それと等価な パラメータを返す材料微視構造(ミクロ構造)の位相 あるいは材料配置(トポロジー)を求めるものである。 例えば、Sigmund と Torquato<sup>13)</sup>はマクロ的な熱膨張係 数を所与とし、それと等価になるミクロ構造のトポロ ジーを算出している. Larsen ら<sup>14)</sup>はマクロ的に負のポ アソン比を発現できるミクロ構造のトポロジー求めて いる.

なお、本研究のようにトポロジー最適化の概念を非破 壊検査に応用した例は少なく、著者らの知る限り、Lee

ら<sup>5)</sup>や Niemann ら<sup>6)</sup>, 西津ら<sup>7)</sup>, Amstutz と Dominguez<sup>8)</sup> の研究報告しか見当たらない。Lee ら<sup>5)</sup>や Niemann ら<sup>6)</sup> は、周波数応答解析に基づいたトポロジー最適化手法を 開発し、損傷した構造の共振周波数を所与として、それ と等価な周波数を与える損傷分布を求めている。一方, 西津ら<sup>7)</sup>は,損傷した構造の固有振動数を所与とし,固 有振動解析に基づくトポロジー最適化を用いて構造の 損傷分布を求めている.しかし、これらの手法はあく までも構造物内において損傷している物質点の"位置" を同定するためのもので、しかも、同定できる損傷筒 所は数カ所に限られるようである. この理由は, 所与 の情報源である共振周波数や固有振動数は実数であり, これらの逆問題を解くにあたってはデータ量が少なす ぎるためである.また、これらの逆問題ではそもそも解 が一意に求まらない(非一意性)の問題を呈しており, このような問題設定下においては、いくら高精度の最 適化アルゴリズムを導入して逆問題を解いても現実の 複雑な"ひび割れ分布"を再現することはできない。こ れは、Lee ら<sup>5)</sup>や Niemann ら<sup>6)</sup>、西津ら<sup>7)</sup>の実施した数 値計算例においていずれも数個の損傷しか扱えていな いことからも明らかであろう.

また,Amstutz と Dominguez<sup>8)</sup>は,実際の超音波計測 を想定した上で,境界要素法にトポロジカル微分とい う概念を導入して材料欠損箇所を同定するという興味 深い手法を提案している.この手法は例示された数値 計算結果を見ても同定精度が高く優れた手法であると 思われるが,理論的に難解で扱いにくいことと,上記 の論文と同様に,連続した複雑なひび割れ分布を再現 できる手法ではない.

このような経緯から言えば,異方性の材料剛性テン ソルを所与とする本手法は,基準となる所与のデータ 量が多いため,精度よく同定さえできれば,上で示し た手法よりもある程度は複雑なひび割れ(マイクロク ラック)分布を再現できるものと期待できる.この点 が,現在の非破壊検査シミュレーションに対して,本研 究が主張する新規性である.本論文では,それを確認 するために後述の数値計算例において詳しく検証する.

なお、本研究で対象とするミクロ構造の境界値問題 は、ミクロ構造において既にマイクロクラックが発生 している状態を基本とした線形の有限要素解析を行う ことでその解を求めることとした。

また、ミクロ構造を構成する材料については、簡便 のため等方性の線形弾性体としてモデル化するが、劣 化のない健全な部分の材料定数には(損傷のない)固 体材料固有のヤング率を与え、マイクロクラックの部 分は材料が欠損して空隙になっていると仮定して極め て小さいヤング率を与えることとした.これによって、 マイクロクラックの発生に伴う、平均的なマクロ材料 剛性の低下については、上述したマイクロクラックの ヤング率がほぼ零として扱われていることで表現され ているものと見なしている.このような考え方は、Lee ら<sup>5)</sup>や Niemann ら<sup>6)</sup>、西津ら<sup>7)</sup>の研究報告でも同様に用 いられている.また、コンクリートはセメントと骨材 からなる複合材料であるが、本論文の目的を勘案して、 ここでは単一の材料として簡便的に取り扱っている.

## 2. 均質化法によるマクロ材料剛性の導出

#### (1) 概要

本節では、後述の逆均質化法によるマイクロクラッ ク分布の同定法の理解を助けるために、その基礎とな る均質化法によるマクロ材料剛性テンソルの導出方法 について概説する.なお、以降では均質化法によって 求められるマクロ材料剛性テンソルを C<sup>H</sup> と表記する.

まず,マクロ材料剛性テンソル C<sup>H</sup>を求める手順であ るが、均質化法を基本として周期的なミクロ構造(ユ ニットセル)を取り出し、それを数値的な供試体とみ なして材料実験を模擬する.具体的に言うと、ミクロ 構造の境界値問題を解くことから始める.次に、そこ で得られた解析結果をマクロな材料変数に変換するこ とでマクロ材料剛性テンソル C<sup>H</sup>を求める.このように ユニットセルに対する数値解析をとおしてマクロ材料 挙動を得る一連の操作は「数値材料試験」と称されて いる.

ちなみに、ミクロ構造の材料モデルが等方性の線形 弾性体を仮定しているにも関わらず、その平均的な特 性であるマクロ材料剛性テンソル C<sup>H</sup> が異方性を表現で きるのは、均質化法によって、ミクロ構造内の材料非 均質性が及ぼす力学的な影響を考慮することができる ためであり、これはミクロ構造の境界値問題を解くこ とで可能になるものである.

以下では、ミクロ構造の境界値問題とマクロ材料剛 性テンソルの算出方法について概説する.

#### (2) ミクロ構造の境界値問題

力学的平衡状態にある周期的なミクロ構造を有する 非均質弾性体に対して、力学的に等価な均質体を定義 したものをマクロ構造と呼ぶ.ここでいう力学的に等 価とは、マクロ構造内の任意の点xにおけるマクロ応 力 $\Sigma$ が非均質性を特徴づける周期的なミクロ構造に依 存し、それによって定義可能であることを意味する.す なわち、次式のようにユニットセル内に分布するミク ロ応力 $\sigma$ の体積平均で求められることを意味する.

$$\Sigma = \frac{1}{|Y|} \int_{Y} \sigma dy = \langle \sigma \rangle$$
(1)



**図-1**2次元ユニットセルの表面力ベクトルtとマクロ応力ベ クトル f の概念図

ここで、Yは周期的なミクロ構造領域を意味し、yはミ クロ構造内の任意の点を示す座標でミクロスケール変 数と呼ばれる.ちなみに、y座標の原点位置は任意に設 定してよいが、理解しやすくするためにユニットセル のコーナー節点におくとよい.

同様にマクロひずみテンソル E とミクロひずみテン ソル *ε* も次のような関係にある.

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d} \boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \tag{2}$$

ここで、ミクロひずみ $\varepsilon$ は、ユニットセル内のミクロな変位場w(x, y)より、次式のように定義される.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\boldsymbol{v}}^{\text{sym}} \boldsymbol{w} \tag{3}$$

ここで、 $\nabla_y$ はミクロスケール変数yによる勾配 $\partial/\partial y$ であり、右上の sym はミクロの変位勾配  $\nabla_y w$ の対称部分を取り出した対称テンソルである.

また、ミクロ変位場wは次式のようにマクロひずみ に比例して線形分布する項*Ey*(線形変位場)と非均質 性に起因して生ずる線形分布からのずれを表す擾乱項 *u*\*に分解できるものとする.

$$w = Ey + u^* \tag{4}$$

ただし、この擾乱変位場 u\* には、次式のようにユニットセル境界上 ∂Y で周期的であるという拘束条件を課す.

$$\boldsymbol{u}^{*}|_{\partial Y^{[k]}} = \boldsymbol{u}^{*}|_{\partial Y^{[-k]}}, \text{ for } k = 1, 2 \text{ on } \partial Y^{[k]}$$
 (5)

ここで、 $\partial Y^{[k]}$ は図-1に示すようにユニットセルが矩 形でその境界が座標軸と平行に定義されていると仮定 した場合に、正規直交基底ベクトル $e_k$ が法線ベクトル となるような境界領域(ここでは境界線)を意味する.

また,この擾乱変位 u\* の周期性より,実変位についても次式のような対となる境界線間の相対変位に関する拘束条件式が得られる.

$$w^{[k]} - w^{[-k]} = EL^{[k]}$$
(6)

ここで、簡単のため $w^{[k]} := w|_{\partial Y^{[k]}}$ とおいた.また、 $L^{[k]}$ は、矩形ユニットセルの $e_k$ 軸方向において対となる境



図-2 2次元ユニットセルに与える3つの単位マクロひずみ E およびその変形モード図と相対変位 q

界線上の物質点を結合するための境界辺ベクトルと呼 ばれ、以下のように定義される。

$$\boldsymbol{L}^{[k]} := \boldsymbol{y}|_{\partial Y^{[k]}} - \boldsymbol{y}|_{\partial Y^{[k-1]}}$$
(7)

また,ユニットセルのもう一つの周期境界条件として,単位ベクトル nを有する境界線上のミクロ表面応 カベクトル  $t^{[n]} = \sigma n$ はユニットセルの対となる境界線 において反対称性が課せられる.

$$t^{[k]} + t^{[-k]} = \mathbf{0}$$
 (8)

ここでも簡単のため  $t^{[\pm k]} := t^{[\pm e_k]}$  とおいた. この周期 境界上のミクロ表面応力ベクトル t をユニットセル境 界で積分し、平均化すると次式のようなマクロの表面 応力ベクトル  $\tilde{t}$  とすることができる(図–1参照).

$$\tilde{\boldsymbol{t}}^{[k]} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{k}$$

$$= \frac{1}{|\partial Y^{[k]}|} \int_{\partial Y^{[k]}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{k} dy = \frac{1}{|\partial Y^{[k]}|} \int_{\partial Y^{[k]}} \boldsymbol{t}^{[k]} dy \qquad (9)$$

以上に述べた式にミクロスケールの平衡方程式とミ クロ材料の構成則を加えた式により、ユニットセルに 対するミクロ構造の境界値問題が定義できる.これら を再び整理して書き下すと以下のようになる.

$$\begin{aligned} \nabla_{y} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla_{y}^{\text{sym}} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \end{aligned} \qquad \text{in } \boldsymbol{Y} \qquad (10) \\ \tilde{\boldsymbol{t}}^{[k]} &= \frac{1}{|\partial \boldsymbol{Y}^{[k]}|} \int_{\partial \boldsymbol{Y}^{[k]}} \boldsymbol{t}^{[k]} d\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{w}^{[k]} - \boldsymbol{w}^{[-k]} &= \boldsymbol{E} \boldsymbol{L}^{[k]} \end{aligned} \right\} \qquad \text{on } \partial \boldsymbol{Y}^{[k]} \qquad (11) \end{aligned}$$

ここで、Cはミクロ構造内に分布する材料の等方性弾 性剛性テンソルである.



図-3 相対変位ベクトルを自由度に持たせた外部節点とマク ロの表面力ベクトルの概念図

#### (3) マクロ材料剛性テンソルの算出方法

ここでは、Terada ら<sup>9)</sup>および Watanabe と Terada<sup>10)</sup>に 従い、前述のミクロ構造の境界値問題の境界条件に対 し、外部節点という概念を取り入れて定式化したものを 紹介する.まず、ユニットセルの周期境界における相対 変位に関する拘束条件式(6)を以下のように書き表す.

$$\mathbf{v}^{[k]} - \mathbf{w}^{[-k]} = \mathbf{q}^{[k]} \tag{12}$$

ここで,

$$\boldsymbol{q}^{[k]} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{L}^{[k]} \tag{13}$$

は、対となる周期境界線における相対変位ベクトルを 意味する.また、2次元問題であるため、ここでは所与 のマクロひずみを図-2のように置けば L<sup>[k]</sup> は以下のよ うに書くことができる.

$$\boldsymbol{L}^{[1]} = \left\{ l^{[1]} \quad 0 \right\}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{L}^{[2]} = \left\{ 0 \quad l^{[2]} \right\}^{\mathrm{T}}$$
(14)

ここで, $l^{[1]}$ , $l^{[2]}$ はぞれぞれ $e_1$ , $e_2$ 軸に平行な矩形ユニットセル境界辺の長さを指し,それぞれ**図–1**の中の $|\partial Y^{[1]}|$ , $|\partial Y^{[2]}|$ に相当する.

文献<sup>9),10)</sup>では,**図-3**に示すようにユニットセルの各 周期境界線 $\partial Y^{[k]}$ の外側に, $e_1,e_2$ 軸方向にそれぞれ平 行な2つの自由度をもつ節点を1つ設け,その節点に 前述の相対変位ベクトル $q^{[k]}$ の2成分を格納する.こ の節点は,他の節点と区別するために外部節点と呼ば れている.

つまり,式(12)は対なる周期境界線上の2点の実変 位ベクトルから計算される相対変位量を制御する拘束 条件式である.したがって,数値材料試験においてユ ニットセルにマクロひずみ *E* の任意の成分を与えるた めには,式(13)からわかるように結果としてこの外部 節点の相対変位成分  $q_i^{[k]}$ を制御すればよいことになる.

いま,式(12)の変位成分  $q_i^{[k]}$ を既知として与えた場 合,それは相対変位  $w_i^{[k]} - w_i^{[-k]}$ を与えたことに他なら ず,境界  $\partial Y^{[k]}$ 上のミクロ表面応力ベクトル  $t_i^{[k]}$  はその 境界全域で未知数となる.また,それによる境界  $\partial Y^{[k]}$ 上での平均値であるマクロ表面応力ベクトル  $\tilde{t}_i^{[k]}$  も未知 数となる.

しかしながら,既知の相対変位成分  $q_i^{[k]}$ に対応する 外部節点の反力を  $R_i^{[k]}$  と表せば,それはミクロ応力ベ クトル  $t_i^{[k]}$  をその境界で線積分したもの,すなわち

$$\boldsymbol{R}^{[k]} = \int\limits_{\partial Y^{[k]}} \boldsymbol{t}^{[k]} \mathrm{d} \boldsymbol{y}$$
(15)

に他ならない.したがって,式(9)の関係より,外部節 点の反力式(15)をユニットセル境界線長さ $|\partial Y^{[k]}|$ で除 したものが未知のマクロ応力成分 $\Sigma_{ik}$ となることから次 式が成立し,

$$\Sigma_{ik} = \tilde{t}_i^{[k]} = \frac{R_i^{[k]}}{|\partial Y^{[k]}|}$$
(16)

これをベクトル表記で書くと以下となる.

$$\begin{cases} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{cases} = \begin{cases} \tilde{t}_1^{[1]} \\ \tilde{t}_2^{[2]} \\ \tilde{t}_2^{[1]} = \tilde{t}_1^{[2]} \end{cases}$$
(17)

ここで、ユニットセルに3方向の単位マクロひずみ  $E^{(11)}$ 、 $E^{(22)}$ 、 $E^{(12)}$ を個別に与えて、それぞれに数値材 料試験を実施すれば、次式のようなマクロ材料剛性  $\mathbb{C}^{H}$ を求めることができる.なお、ここでは、見やすくする ためにマクロ材料剛性  $\mathbb{C}^{H}$ を行列形式で表示している.

$$\mathbb{C}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11}^{\mathrm{H}} & \mathbb{C}_{12}^{\mathrm{H}} & \mathbb{C}_{13}^{\mathrm{H}} \\ \mathbb{C}_{12}^{\mathrm{H}} & \mathbb{C}_{22}^{\mathrm{H}} & \mathbb{C}_{23}^{\mathrm{H}} \\ \mathbb{C}_{13}^{\mathrm{H}} & \mathbb{C}_{23}^{\mathrm{H}} & \mathbb{C}_{33}^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{(11)} & \Sigma_{11}^{(22)} & \Sigma_{11}^{(12)} \\ \Sigma_{22}^{(11)} & \Sigma_{22}^{(22)} & \Sigma_{22}^{(12)} \\ \Sigma_{12}^{(11)} & \Sigma_{12}^{(22)} & \Sigma_{12}^{(12)} \end{bmatrix}$$
(18)

ここで,Σの上付き括弧内の数字は,ユニットセルに与 えるマクロひずみの変形成分を示している.

## 3. 逆均質化法を用いたマイクロクラック分布 の同定法

本節は逆均質化法によって材料中のマイクロクラッ ク分布を同定する方法について説明する.まず,所与 の異方性材料剛性テンソルを観測剛性テンソルと呼び, D\* と表記する.

本研究で述べる逆均質化法は,観測剛性 **D**\* と等価な マクロ材料剛性 C<sup>H</sup> を与えるミクロ構造のトポロジーを 求める最適化問題であり,そこで得られたトポロジー をマイクロクラックの分布と見立てるものである.な お,逆均質化法が扱う問題は非一意性の問題であるた め,得られたマイクロクラック分布は存在するいくつ かの解の1つに過ぎず,また大域解であるという保証 はない点に留意する必要がある.以下では,最適化問 題の変数である設計変数の定義と有効材料弾性剛性テ ンソルについて説明した後,当該最適化問題の設定お よび最適化に必要な感度解析について説明する.

#### (1) 設計変数の定義および有効弾性係数

本研究では有限要素法を用いてミクロ構造の境界値 問題を解くことを前提とし、ユニットセル内の各要素 における正規化された材料密度  $s_i$ を設計変数として定 義する.ここでは、一般的なトポロジー最適化の場合 と同様に  $0 < s_i \le 1$  の間で連続的に変化する変数とし て取り扱う.添え字  $i(=1,...,n_{ele})$ は、i 番目の有限要素 を意味し、 $n_{ele}$ はユニットセル内の要素の数である.こ れにより、各要素は  $s_i = 1$  の場合には材料がその要素 を占め、逆に  $s_i = 0$ の場合には要素に材料はなく空隙 (ひび割れ)を表すことができる.また、本研究で用い る材料モデルは、次式に示すように多孔質材料に広く 用いられる SIMP 法<sup>15)</sup>を用いた.

$$\mathbb{C} = s^{\eta} \mathbb{C}_0 \tag{19}$$

ここで、Cは有効材料弾性剛性テンソルであり、式(10) のそれと同一のものである。また、C<sub>0</sub>は空隙がない状態の固体材料の弾性剛性テンソルで既知であり、最適 化途中も変化しない。ηは式(19)で示される内挿関数 のべき乗数であり、物理的な意味を保証するものでは ない。

#### (2) 最適化問題の定式化

本節では、これまでに説明した逆均質化法を用いた マイクロクラック分布の同定問題を等式制約条件付き の最適化問題として定式化する.ここでは、目的関数と 等式制約条件を与える制約関数をそれぞれ f(s), h(s) として表す.また、s は設計変数 s<sub>i</sub> を列に並べたもの、 すなわち設計変数ベクトルを意味する.

以下に本研究で設定した最適化問題を記す.

$$\max f(\mathbf{s}) = \int_{Y} s_i \, \mathrm{d}Y$$
  
subject to  $h(\mathbf{s}) = \sum_{p,q,r,s} \left( \mathbb{C}_{pqrs}^{\mathrm{H}} - \boldsymbol{D}_{pqrs}^* \right)^2 = 0$  (20)  
 $0 \le s_i \le 1$ 

本最適化問題では観測剛性 **D**\* とマクロ材料剛性 C<sup>H</sup> がほぼ同値となることを最優先して,これを等式制約 条件に組み込んだ.具体的には各成分の二乗誤差の合 計が零となるように設定している.なお,一般的なト ポロジー最適化では,材料体積量(あるいは質量)を 制約条件に組み込ことが多いが,マイクロクラック分 布を求める当該逆問題においては,材料,あるいはク ラックの体積量に制約を課すことに対して,工学的な 意味は見いだせない.そこで,本研究では固体材料の 体積量最大化,言い換えればマイクロクラック量最小 化として目的関数に組み込んだ.

よって,式(20)の意味するところは,等式制約条件 を満足するマイクロクラック分布のうち,マイクロク ラック量が最小のものを求めるという最適化問題であ ると解釈できる.このような問題設定のもと,勾配基 本法に基づく最適化アルゴリズムを用いてこの同定問 題を解く.次節ではその最適化アルゴリズムに必要な, 制約条件と目的関数の設計変数に対する感度の導出を 行う.

#### (3) 感度解析

#### a) 等式制約条件の感度

ここでは,等式制約条件 h(s) の設計変数  $s_i$  に関する 感度  $\partial h/\partial s_i$  を求める.式 (20) の制約条件を設計変数  $s_i$ について微分すると,

$$\frac{\partial h}{\partial s_i} = \sum_{p,q,r,s} 2 \left( \mathbb{C}_{pqrs}^{\mathrm{H}} - \boldsymbol{D}_{pqrs}^* \right) \frac{\partial \mathbb{C}_{pqrs}^{\mathrm{H}}}{\partial s_i}$$
(21)

となる. なお,上式のマクロ材料剛性テンソルの感度 については導出がやや困難であるが,著者らの研究グ ループがこれまでに導いた以下の感度式<sup>17),18)</sup>が理論的 に正しいことがわかっており,それを代入する.

$$\frac{\partial \mathbb{C}_{pqrs}^{\mathsf{H}}}{\partial s_i} = \frac{1}{|Y|} \int_{V} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial s_i} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(pq)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(rs)} \, \mathrm{d}y \tag{22}$$

なお、制約条件の感度式(21)を見ると、括弧の中の 符号は観測剛性とマクロ材料剛性の成分の大小関係に よって正負が反転する可能性があることがわかる.こ のような条件下においても安定的に最適解を与える最 適化アルゴリズムとして移動漸近法 (Method of Moving Asymptotes: MMA)<sup>16</sup>を採用した.

#### b) 目的関数の感度

本研究における目的関数の感度については,以下に 示すとおり陽的に求めることができる.

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = \int_Y \mathrm{d}Y \tag{23}$$

### 4. 数値計算例を用いた同定精度の検証

#### (1) 同定条件

本数値計算例を実施するにあたり,ユニットセルは8 節点四辺形要素の正方形格子メッシュで 50×50 要素数 を用いてモデル化した.材料はコンクリートを想定し てヤング率 25 [GPa],ポアソン比 0.167 とした.また, 平面応力状態を仮定し,SIMP 法のべき乗数 η は 3.0 と した.



図-4 最適化前のユニットセルの材料配置

ユニットセルの初期の材料配置としては、図-4に示 すようにあらかじめユニットセルの中央に空隙を与え た材料配置を用いた.これは、周期性を有するユニッ トセルの初期構造において、同じ値の設計変数値をユ ニットセル全体に一様に与えて数値材料試験を実施す ると、すべての要素において一様に同じ変形モード、ま たそれにより感度も同値となってしまい、それ以上最 適化が行えなくなることを回避するためである。

なお、空隙と想定した要素の初期の設計変数値は、計 算の安定化を図るために僅かな量  $s_i = 1.0 \times 10^{-5}$ を与 えた.

#### (2) 同定結果: 一方向マイクロクラックの場合

本計算例では、まず一方向の単純なマイクロクラック を対象にひび割れ角度 $\theta = 0, 30, 45, 150, 135^{\circ}$ の5ケー スについて同定を行った.ターゲットとなる観測剛性  $D^*$ については、図-5に示す5つのマイクロクラック分 布を準備し、それぞれの観測剛性 $D^*$ を均質化法によっ て求め、これを所与として扱うものとする.また、f は 目的関数値である材料体積量を示しており、f = 1のと きはマイクロクラックの存在しない健全な状態を意味 する.なお、以降では、煩わしさ避けるために観測剛性  $D^*$ および均質化法によって求めたマクロ材料剛性  $\mathbb{C}^{H}$ は行列表示とした.

図-6 および図-7 は、初期の材料配置として穴あき構造を用い、外枠の初期の設計変数をそれぞれ  $s_i = 0.25$ および  $s_i = 1.0$ を用いたときの同定結果である.

まず,図-6に示す $\theta$ = 30°,45°の同定結果について観察する.同定によって得られた均質化材料剛性 $\mathbb{C}^{H}$ は, いずれの成分も観測剛性D\*のそれと非常に近い値となっており,最大でも0.1%の誤差である.これより,最適化アルゴリズム MMA による同定精度の高さが確認できる.

一方,同定されたマイクロクラック分布については, 上記のマクロ材料剛性の同定精度が非常に高いにも関 わらず,所与の分布どおりにはなっていない.しかし, いずれの場合もマイクロクラックの角度は再現できて いるといえる.



図-5 所与のクラック分布とその観測剛性

次に,  $\theta = 150^{\circ} \ge \theta = 135^{\circ}$ について同定を行った結 果を考察する. 左右対称となる $\theta = 150^{\circ} \ge \theta = 30^{\circ}$ , あ るいは $\theta = 135^{\circ} \ge \theta = 45^{\circ}$ の観測剛性および均質化剛 性の成分をそれぞれ比較すると, (1, 3)成分と (2, 3)成 分の符号が異なっているだけで,その成分の大きさは ほぼ同じとなっていることが分かる. これは,力学的 にも正しいもので均質化解析の妥当性と同定精度の高 さを裏付けるものであると言える. その結果, $\theta = 150^{\circ}$  $\ge \theta = 135^{\circ}$ のマイクロクラック分布も所与の角度を再 現できていると言える.

 $\theta = 0^{\circ}$ の同定結果も同様に,所与の分布を正確に表 すことはできないがマイクロクラック分布の方向は再 現できているといえる.なお,マクロ材料剛性行列の 同定精度については, (1,1)成分は他のケースと同様に





0.1%程度の僅かな誤差しかなく,精度よく同定できて おり,それ以外の成分については,観測剛性行列の成 分があまりにも小さな値であるため,小数点以下の桁 数に隔たりがあるように見えるがほぼ零であることか ら精度よく同定できていると言える.

これに加えて、目的関数値(材料体積量)fの値を 見ると、同定後の材料体積量は所与のものよりも常に 大きな値となっていることがわかる.これは、前述の とおり、等式制約条件を満たした中で材料体積量を最 大(あるいはマイクロクラック量を最小)にするという 当該最適化問題の設定によるもので想定どおりの結果 である.この所与の材料体積量との相違に加え、そも そも当該問題は非一意性の問題であることを鑑みれば、





図-7 同定されたクラック分布とその均質化材料剛性(図-4に 示した外枠部分の設計変数初期値を 1.0 とした場合の 結果)

所与のマイクロクラック分布を忠実に再現することは 数学的に不可能であることを理解しておく必要がある. この点を踏まえた上で,同定結果を改めて観察すると, 本手法はターゲットとした所与のマイクロクラック分 布に対して,その角度を正しく再現できるものである と言える.

また,図-7は,設計変数の初期値が異なる条件で実施した同定結果であるが,図-6と同様の結果を示していることがわかる.この結果は,本手法が設計変数の初期値依存性による影響が少ない手法であることを示唆するものである.これについては,前述のように材料体積量に制約を課していないこと,すなわち,本最適化問題の設定として材料体積量が最適化計算の中で





変化する自由度の高い同定が行われている結果である と言える.

#### (3) 同定結果:分岐するマイクロクラックの場合

本節では、より複雑な同定問題として分岐するマイク ロクラックを対象として同定精度の検証を行った。**図-8**は、ターゲットとする2種類のマイクロクラックの観 測剛性とそのマイクロクラック分布を示している。ま た、初期の材料配置については、前回と同様に空隙をユ ニットセル中央においた材料配置を用いているが、今 度は外枠の初期設計変数値を  $s_i = 0.1, 0.5, 1.0 \text{ o} 3 種類$ を用意した。

図-9および図-10は、図-8に示した case-1,2の観測 剛性 D\* をターゲットに同定した結果である.なお、本 節ではマイクロクラック分布を見やすくするためにユ ニットセルを 3×3 枚並べて貼り付けた周期配置で表示 している.まず、マクロ材料剛性行列 C<sup>H</sup>の同定精度に ついては、図-9の場合は最大でも 1%程度、図-10では 対角項で 0.1%程度の誤差となり、高精度で同定できて いることがわかる.一方で、得られたマイクロクラック 分布に関しては、局所的には再現しきれていない部分 が多く見られたが、定性的にはマイクロクラックの全 体的な方向あるいはレイアウトは再現できていると考 えている.

この結果は、マクロ材料剛性行列 C<sup>H</sup>の同定精度が 極めて高かったことを勘案すれば、数値的な同定自体 は成功しているものの、ターゲットとなるマイクロク ラック分布が複雑になるにつれ、細かな分布の同定は 困難になることを示唆している.これは、前述のとお り、数学的に非一意性の問題を扱っているため、別の 観測データを新たに付加しない限り、これ以上の改善 を期待することはできない.



**図-9** case-1 の分岐マイクロクラックの同定結果 (ユニットセル 3×3 の周期的配置): 2 番目から順に**図-4** に示した外枠部分の設計変数初期値を 0.1, 0.5, 1.0 とした場合の結果

以上をまとめると、本提案手法は、マクロ材料剛性 テンソルを所与の観測データとしてそのマイクロクラッ ク分布を同定するものであるが、そのマクロ材料剛性 に関してはいずれも高精度で同定できることが示され た.また、所与のマイクロクラック分布が単純な場合 はその方向(角度)を正確に再現でき、複雑な分布を 呈する場合は、マイクロクラックの全体的なレイアウ トは概ね再現できるものの、細部の分布でまでは同定 しきれないことが確認された.しかし、繰返しとなる が当該問題はそもそも非一意性の問題であることから、 解は無数に存在し得ることを理解しておく必要がある.

なお、これまでのトポロジー最適化を適用した非破 壊検査シミュレーションに関する研究<sup>5),6),7),8)</sup>では、数 カ所の材料損傷位置しか同定できなかったのに対して、 本手法によってマイクロクラックという損傷部分の方 向を再現できるようになった点については、発展途上 であるこの分野を一歩前進させるものであると考えて いる.



図-10 case-2 の分岐マイクロクラックの同定結果 (ユニット セル 3×3 の周期的配置)

## 5. 結論

本論文は、有限要素法を用いた逆均質化法という数 理的手法を用いて、構造物の劣化・損傷の根源となる マイクロクラックの分布を同定するものである.ここ では異方性材料剛性を所与とし、それと等価な材料剛 性を持つマイクロクラックの分布を最適化アルゴリズ ムを用いて求める一連の手法を提案し、その同定性能 の検証を行った.本研究の問題設定では、制約条件式 の設計変数に関する感度の符号が正負混在することに なるため、一般のトポロジー最適化で広く用いられる 最適性規準法を適用することはできない.本研究では、 そのような条件下でもロバストかつ精度よく解を求め ることが可能な MMA と呼ばれる最適化アルゴリズム を適用した.

以下に本論文で得られた知見を記す.

 本論文で導出した感度式と最適化アルゴリズムの MMAにより、ターゲットとなるマイクロクラック 分布が複雑な場合であってもその所与の観測材料 剛性 D\*に対して、ほぼ同値となる均質化材料剛性 ℂ<sup>H</sup>が得られることを確認した.

- ターゲットとなるマイクロクラック分布が一方向の単純な場合は、その方向(角度)を正しく同定できることが確認された。ただし、複雑なマイクロクラック分布を同定する場合は、大まかな分布を再現できるが細部まで再現することはできないことが明らかになった。
- 提案手法においては、設計変数の初期値の違いによる同定結果への影響は小さいことが確認された。
- これまでのトポロジー最適化を適用した非破壊検 査シミュレーションに関する研究<sup>5),6),7),8)</sup>では、数 カ所の材料損傷部の位置しか同定できなかったが、 本手法により、損傷部分(マイクロクラック)の 方向を再現できるようになったことは、この分野 において一歩前進するものである。

また,本論文で提案した手法については,今後具備 すべき以下の重要な課題があるため,それを列挙して おく.

- 実際のマイクロクラックは有限の大きさをもつが、 本手法ではその大きさを表現するための仕組みが 導入されていない.これについては、寸法効果を 考慮したマルチスケール解析と同じような枠組み を導入するなどの工夫が必要であると考えている。
- 本来、マイクロクラックは完全に周期的に存在し 得るものでない.しかし、本研究では同定対象と する地点の近傍に限っては同様のマイクロクラッ クが周期的に存在しているはずであるという不確 かな仮定をもとに、周期性を取り扱っている.これ については、今後克服すべき理論上の課題である.
- マクロ材料剛性テンソルを所与としているが、実用的な観点から見れば現状では容易に得られるものではない。このような状況より、本研究はいまだ基礎的研究の範疇にあり、いまだ実用性に関しては乏しい段階にある。

**謝辞**: 本研究は研究 JSPS 科研費 24360175 の助成を 受けたものです. この助成に心より感謝申し上げる. ま た,最適化アルゴリズム MMA は,スウェーデン王立 工科大学 K. Svanberg 教授から提供されたものである. ここに感謝申し上げる.

#### 参考文献

 細田暁, 林和彦, 下田智也, 吉田早智子: コンクリート表層 のマイクロクラックが表面の吸水性と透気性に及ぼす影響, Cement Science and Concrete Technology, No.63, 2009.

- Jensen, A. D. and Chatterji, S.: State of the art report on micro-cracking and lifetime of concrete-Part 1, *Materials* and Structure, Vol. 29, Jan. Feb., 1996.
- Mehta, P.K. and Monteiro, P.J.M.: Concrete: Microstructure, Properties, and Materials, McGraw Hill Education, 2013.
- 4) 田澤榮一:コンクリートの欠陥とその対策, コンクリート工学, Vol.37, No.10, pp.3-10, 1999.
- Lee, J.S., Kim, J.E. and Kim, Y.Y.: Damage detection by the topology design formulation using modal parameters, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 69, pp.1480–1498, 2007.
- Niemann, H., Morlier, J., Shahdin, A. and Gourinat, Y.: Damage localization using experimental modal parameters and topology optimization, *Mech. Syst. Signal. Pr.*, Vol. 24, pp. 636–652, 2010.
- 7) 西津卓史,竹澤晃弘,北村充:トポロジー最適化と固有 振動数解析に基づく非破壊検査での損傷同定手法,日本 船舶海洋工学会論文集,第18号,pp.73-80,2013.
- Amstutz, A. and Dominguez, N.: Topological sensitivity analysis in the context of ultrasonic non-destructive testing, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 32, pp. 936–947, 2008.
- Terada, K., Kato, J., Hirayama, N., Inugai, T. and Yamamoto, K.: A method of two-scale analysis with micromacro decoupling scheme: application to hyperelastic composite materials, *Comput. Mech.*, Vol. 52, pp. 1199–1219, 2013.
- Watanabe, I. and Terada, K.: A method of predicting macroscopic yield strength of polycrystalline metals subjected to plastic forming by micro-macro de-coupling scheme, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 52, No. 2, pp. 343–355, 2010.
- 岩舘礼,河西亮輔,京谷孝史:粒子フィルタによるトン ネル覆工の健全度評価に関する研究,第18回計算工学 講演会論文集, Vol. 18, CD-ROM, 2013.
- Sigmund, O.: Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem, *Int. J. Solid. Struct.*, Vol.31, No.13, pp.2313-2329, 1994.
- Sigmund, O. and Torquato, S.: Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, No.6, pp.1037-1067, 1997.
- 14) Larsen, U.D., Sigmund, O. and Bouwstra, S.: Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio, *J. MEMS*, Vol. 6, No.2, pp.99-106, 1997.
- 15) Zhou, M. and Rozvany, G.I.N.: The COC algorithm, part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol.89, pp.309–336, 1991.
- Svanberg, K.: A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations, *SIAM J. Optim.*, Vol. 12, No. 2, pp. 555–573, 2002.
- 17) 谷地大舜,加藤準治,高瀬慎介,寺田賢二郎,京谷孝史: マルチスケールトポロジー最適化手法と解析的感度導出 法の提案,日本計算工学会論文集,No. 2013002, 2013.
- 18) Kato, J., Yachi, D., Terada, K. and Kyoya, T.: Topology optimization of micro-structure for composites applying a decoupling multi-scale analysis, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 49, pp. 595-608, 2014.

(2015.11.19 受付)

# EVALUATION OF MICRO-CRACK DISTRIBUTION USING INVERSE HOMOGENIZATION METHOD

#### Junji KATO, Ryosuke KASAI, Takashi KYOYA and Kenjiro TERADA

Detection of micro-cracks is very important to lengthen the lifetime of structures because micro-crack is a signal of initiation and growth of deterioration of materials and eventually degrades the mechanical performance of structures. However, no practically useful non-destructive testing device for large scale structures can capture the essential micro-crack for large structures in reality. In the meanwhile, nowadays, non-destructive testing simulation is also gaining attention. The term, non-destructive testing simulation, means a numerical testing for crack inspection applying computational mechanics. The present study proposes a method to determine micro-crack topology giving an equivalent homogenized macro-stiffness tensor to the prescribed anisotropic material stiffness tensor by applying an inverse-homogenization method. We demonstrate the accuracy of the evaluation of the proposed method in terms of a series of numerical simulations.